Управление образования
Администрации Ленинского района
Средняя общеобразовательная школа №127

РЕФЕРАТ

Тема: *«Математическое моделирование биологических форм».*

Домникова Петра
Ученика 10 А класса
Средней общеобразовательной
Школы №127.
Адрес: г. Новосибирск ул.
Беловежская д.8 кв.79
Телефон: (383-2) 53-55-97
Руководитель: Прудникова Е. П.,
учитель математики высшей категории.

г. Новосибирск 2000 г.

СОДЕРЖАНИЕ.

Введение

1. Понятие «форма» в биологии и в векторной геометрии.

2. Математическая модель формообразования.

   2.1 Поиск метода исследования.

   2.2 От «золотого» отрезка – к пространству симметрий подобий.

      2.2.1 Деление отрезка в золотом отношении.

      2.2.2 А-ромб и «живой» треугольник.

      2.2.3 Логарифмическая спираль.

   2.3 Уравнение экспансии – векторная основа модели формообразования.

Заключение.

Литература.

Введение.

Вторжение (часто необдуманное) человека в природу связано с непониманием законов гармонии живой природы. Формирование экологической культуры должно начинаться с постижения единства и многообразия биологических объектов. Сущность гармонии природы невозможно выявить только в биологических объектах, даже сопровождая их абстрактно-математическими построениями, - можно лишь наблюдая и осмысливая её проявления, подойти к тайнам живой природы: повторение живого объекта в себе подобном. Рассмотрение различных форм, приводящих к взаимосвязанным выводам и на их основе к модели формообразования. Поэтому цель работы: отыскание единства в многообразии, а инструмент исследования математика, позволяющая рассматривать форму как категорию пространства, а, следовательно, область приложения векторной геометрии.

1. Понятие «форма» в биологии и в векторной геометрии.

Какое из чудес могло бы с большей силой поразить человеческое воображение, чем появление новой жизни? Пространство, которое только что представлялось ничем, становится яблоком, деревом, человеком. Возникновение нового существа - явление целостное. Любой научный эксперимент измерением и воображением ученого разделяет пространство (форму) и вещество (плоть), в то время как целостность - главное качество жизни. Природа скрыто управляет геометрическим подобием, и восприятие формы человеком тоже обнаруживают геометрическое подобие Геометрическое подобие нужно рассматривать как фундаментальную основу эволюции жизни и метод конструирования ею форм. Поэтому математические законы формообразования неизбежно оказываются на стыке научных дисциплин. Здесь требуется свой специальный язык, и начать нужно с определения понятия "форма". Раскрывая содержание этого понятия, можно толковать его традиционно: поверхность, очерчивающая объем живого существа или растения, но такое определение отдаляет нас от цели исследования: в нем исчезло само явление роста, оно отображает жизнь в чуждых ей категориях не как динамику, а как статику.

Поэтому, чтобы исследовать формообразование, необходимо соединить в понятии "форма" представление о росте, как о процессе энергетическом, и геометрическое его содержание, как "овладение пространством", как "развитие точки начала". Чтобы сделать акцент на геометрическую сущность явления, введем понятие "экспансия" [expansio (лат.)- расширение, распространение]. Пользуясь им, определим форму в живой природе как граничную поверхность замкнутого пространства экспансии.

2. Математическая модель формообразования.

2.1 Поиск метода исследования.

Несколько слов о правомерности описания энергетических процессов на языке геометрии. Возможны 2 пути познания:

1)изучение объекта по физическим, химическим параметрам - погружение исследователя в безграничную сложность структурных иерархий самых различных уровней макро- и микромира, описываемых необозримым числом параметров на различных предметных языках.

2) путь геометрического абстрагирования, где предметом исследования служат только пространственные характеристики структур, хотя и необычные, но ведущие к модели формообразования.

Единая математическая модель - представление об экспансии точки начала. В предлагаемой модели пространство понимается как совокупность точек, обладающих равной энергетической потенцией взаимодействия. Радиус взаимодействия отражает двойственность экспансии:

$$\vec{R} = \vec{S} + \vec{U},$$

где S - сингулярность ("единичное"),
U - универсум ("всеобщее")

Прием, которым природа осуществляет жизнь, - это дихотомия с прямым (+) и обратным (-) знаками. Дихотомия как деление клетки пополам и слияние двух в одну - гениальный, но простой способ совершенствования форм жизни путем отбора оптимальных вариантов в открывающейся таким образом лавине комбинаторики.

В математике еще в античные времена была известна пропорция золотого сечения. Единство аддитивности и мультипликативности - глубинное содержание золотого сечения, в нем ключ к явлению формообразования. В математике аддитивность означает, что в числовом ряду $\Phi_1,\Phi_2,\Phi_3,\Phi_4,...,\Phi_{n-1},\Phi_n$ каждый предыдущий член ряда равен сумме двух последующих (удобнее принять за основу не возрастающий, а убывающий ряд золотого сечения): $\Phi_1=\Phi_2+\Phi_3$; $\Phi_2=\Phi_3+\Phi_4$; $\Phi_{n-2}=\Phi_{n-1}+\Phi_n$. Мультипликативность означает, что в числовом ряду $\Phi_1,\Phi_2,\Phi_3,\Phi_4,...,\Phi_{n-1},\Phi_n$ все члены ряда связаны в геометрическую прогрессию: $\Phi_1:\Phi_2=\Phi_2:\Phi_3=\Phi_3:\Phi_4=...=\Phi_{n-1}:\Phi_n=\text{const}$.

Число золотого сечения, соединяющее свойства аддитивности и мультипликативности, находится как общий корень двух уравнений:

$$a + b = c \text{ (аддитивность)};$$

$$a : b = b : c \text{ (мультипликативность)}.$$

В геометрии такую абстракцию выражает отрезок, поделенный на две части (a и b) в золотом отношении: рост - по закону геометрической прогрессии, а подобие (принцип сохранения - генетика) - целое (c). Придадим уравнению золотого сечения вид векторного уравнения, заменив выражение a+b=c, где a:b=b:c, на выражение $\vec{R} = \vec{S} + \vec{U}$,
где $|U|:|S| = |S|:|U|$, либо $|S|:|U| = |U|:|R|$. С плоскости (геометрия отрезка) перейдем в пространство.

В основании векторной геометрии лежит операция векторного сложения и представляет её векторный треугольник. Две стороны в треугольнике выражают величину и направления взаимодействующих потенций, а третья сторона – результат их сложения:

$$\vec{R} = \vec{S} + \vec{U},$$

Единство аддитивности и мультипликативности справедливо для отрезков, взаимодействующих род углом π или 0 (прямая линия) и в векторной геометрии для любых углов взаимодействия ($0 \le \alpha \le 2\pi$). Таким образом, «золотой» векторный треугольник строит класс замкнутых кривых – нетривиальные симметрии, отображающие биологические формы.

Из триады золотого сечения можно перейти в пространство симметрий подобий следующим образом.

2.2. От золотого отрезка – к пространству симметрий подобий.
2.2.1 Деление отрезка в золотом отношении.

Золотое сечение - это закон пропорциональной связи целого и составляющих это целое частей. Классический пример золотого сечения - деление отрезка в среднепропорциональном отношении, когда целое так относится к большей своей части, как большая часть - к меньшей:

$$\frac{a+b}{b}=\frac{b}{a}$$

.Такая задача имеет решение в виде корней уравнения: $x^2-x-1=0$, численное значение которых равно:

$x1=\frac{\sqrt{5}+1}{2}=1{,}618034\ldots=\Phi$; $x2=-\frac{\sqrt{5}-1}{2}=-0{,}618034...=-\frac{1}{\Phi}$.

За кажущейся простотой операции деления в крайнем и среднем отношении скрыто множество удивительных форм выражения пропорции золотого сечения в мире живой природы. Линейный закон золотого сечения широко распространён как числовая характеристика членений стеблей растений, их расположения на стволе и даже пропорций человеческого тела.

Рассмотрим один из способов деления отрезка в золотом сечении (так решали задачу деления отрезка в крайнем и среднем отношении в древнем Египте и древней Греции): делимый отрезок AD=a (рис. 1) достраивают до двойного квадрата ABCD со стороной AB=a/2. Потом из диагонали DB циркулем отсекают отрезок BE=AB=a/2. С помощью циркуля переносят отрезок $FD=FE=x=\sqrt{5}-a/2$. Задача решена:

$a : x = x : (a - x) = 1.618034...$

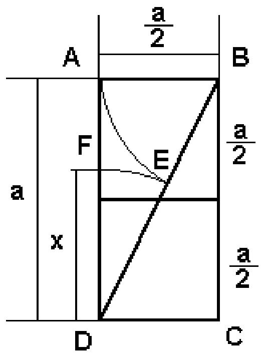

Рис.1

Вообще, любой способ деления отрезка в золотом сечении сводится к построению квадрата и двойного квадрата (полуквадрата). Таким образом, в математику приходят числа $\sqrt{2}$ и $\sqrt{5}$ (Диагонали квадрата и двойного квадрата). Появление диагонали BD двойного квадрата ABCD и есть появление отношения золотого сечения: сторона, а есть среднее между диагональю BD=$\sqrt{5}$, увеличенной на сторону a/2, и этой же диагональю, уменьшенной на сторону a/2:

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = 1{,}618...$$

2.2.2 А-ромб и «живой» треугольник.

Изобразим на вертикали отрезок, разделённый в золотом сечении на две неравные части (рис.2). Большую часть ещё раз разделим в золотом сечении и так будем распространять золотую цепь до бесконечности в направлении, восходящем от большего к меньшему (аддитивность). В центрах полученных отрезков построим окружности радиусами этих отрезков. До открытия возможности, скрытой в золотом сечении и позволяющей моделировать формы, играющие ключевую роль в ритмах жизни живой природы, остаётся несколько шагов.

Введение прямого угла в чертёж преобразовало линейный ряд золотого сечения в пространство симметрий подобий. Для этого отметим предел, к которому стремится убывающий вид (точка N на чертеже). Затем проведём касательные через точку N к проведённым окружностям. Соединив точки касания с центрами соответствующих окружностей, получаем треугольники с прямыми углами. Соединив точку $О_0$ и $Л_1$ (или $П_1$), получим прямоугольный треугольник с аналогичным отношением сторон. В получившихся прямоугольных треугольниках отношение малого катета к большому равно отношению большого катета к гипотенузе. Такой треугольник – треугольник геометрической прогрессии получил в чертеже шесть ориентаций (см. рисунок). Полученную фигуру будем называть асимметричным ромбом (А-ромбом); левая и правая части зеркальны, восходящая цепь золотого сечения развита окружностями, а не полуокружностями (что требуется для практического деления отрезка в золотом сечении), что позволяет выявить некоторые отражения образа данного чертежа в формах живой природы. А-ромб не имеет мерности: любой отрезок в структуре А-ромба можно принять за линейную меру длины. Тогда длина любого его элемента есть число $\sqrt{Ф}^{n}$, где n – целые числа, положительные либо отрицательные. Горизонтали, соединяющие точки пересечения окружностей, делят вертикальную ось А-ромба пополам (точка Е), а каждый её отрезок также пополам .

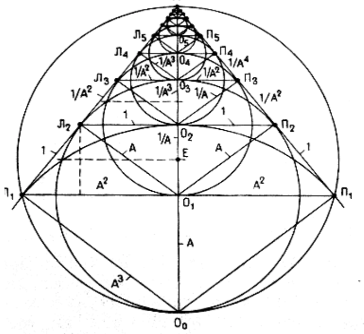

Рис.2 А-ромб.

Угол основания 2α в А-ромбе с точностью до пятого знака совпадает с числом $\frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1{,}618...$ 2α=1,8091 рад=$\frac{1}{2}\frac{\sqrt{5}+1}{2}+1$ (см. рисунок). Этот же угол определяет внутримолекулярные связи в молекуле воды: он является углом атомами водорода в молекуле воды (рис.3).

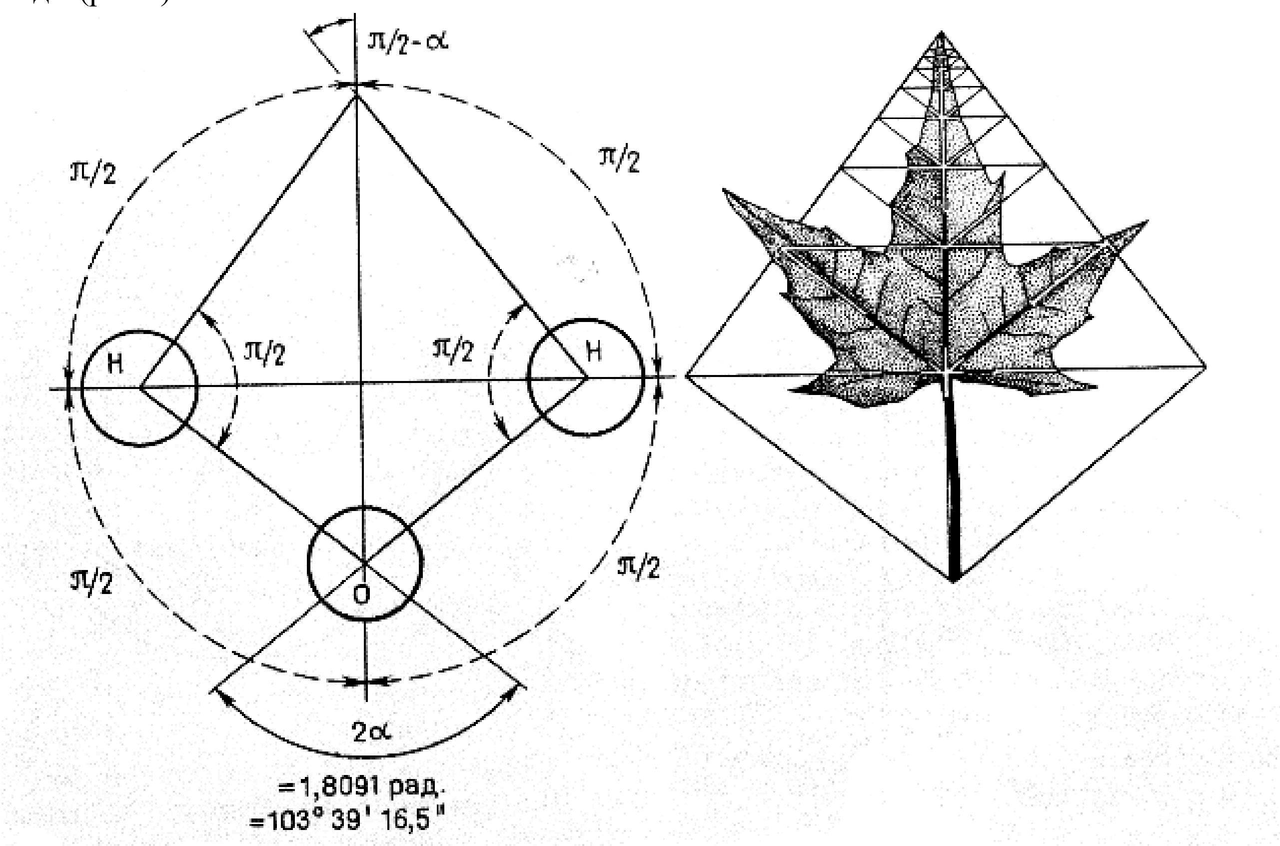

Рис.3

Что такое вода? Большую часть всякой живой клетки составляет вода. Клетки почти всегда окружены водной средой: это может быть пресная или морская вода, тканевый сок, плазма, внеклеточная жидкость. Биологическая информация может передаваться чистой водой, а, кроме того, вода может хранить память о биологически активных молекулах, контактировавших с ней и исчезнувших из нее вследствие многократных разбавлений. То есть, вода лежит в основе жизни по многим параметрам. Жизнь возникла в воде; ничто живое без воды не может существовать.

В угле 2α заключается ассоциация с явлением роста в живой природе. Угол характерен для нерватуры листьев клёна (рис.3) и членения стеблей растений, их расположения на стволе, роста раковин “Pecten” (древнейшая форма жизни моря, восходящая к середине Силура, около 350 млн. лет) – точка O_1 А-ромба соответствует началу роста раковины (рис.4).

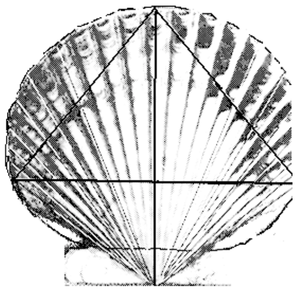

Рис.4 Раковина моллюска Pecten.

Отрезок, делённый в золоте, устанавливает связь трёх величин: двух его частей и целого, которые можно выразить как числа x^2, x и 1. Но треугольник А-ромба $O_ONЛ_1$ (и все ему подобные) тоже имеет соотношение сторон x^2, x и 1(Катеты суть 1 и $\sqrt{\Phi}=1{,}272\ldots$ гипотенуза $(\sqrt{\Phi})^2=1{,}618\ldots$). Значит, деление отрезка в золоте есть частный случай треугольника $O_ONЛ_1$, – если катеты расположатся на одной прямой под углом π, гипотенуза совместится с катетами и возникнет случай деления отрезка в золотом сечении. Одну из сторон такого треугольника можно принять за 1, а две другие будут описываться квадратичной зависимостью. Отсюда следует, что треугольник, сохраняя ту же закономерность, может описывать, подобно часовым стрелкам, любые углы взаимодействия катетов в пределе угла 2π, то есть описывать некоторые замкнутые пространства. Проблема соразмерности и пропорций смещается в этом случае к описанию формы. Как будет вести себя «живой» треугольник, у которого стороны суть x^2, x и 1?

Итак, рассмотрим «живой» треугольник (рис.7), в котором одна сторона лежит на вертикали, являясь осью симметрии на плоскости или же осью вращения в пространстве. Одна из сторон треугольника служит линейной мерой пространства, две другие – связаны квадратичной зависимостью: одна сторона есть квадрат другой. Очевидно, сформулированная задача имеет шесть вариантов решения. Положение на вертикали может занять любая из трёх сторон треугольника: x^2, x или 1. При этом две другие стороны могут меняться местами.

Случай 1-ый. На вертикали переменная x:

а) Если к точке начала приложена константа $x_O=1$, трек описал сферу;

б) Если к точке начала приложена переменная x^2, трек описал поверхность, воспроизводящую яйцо удлиненной формы с отношением диаметров вертикального к горизонтальному 3:2. Форма типична для яиц утиных.

Случай 2-ой. На вертикали переменная x^2:

а) Если к точке начала приложена константа $x_O=1$, трек описывает сферический сегмент, имеющий в основании круг диаметром $\sqrt{3}$ и высоту ½. Сектор, построенный из точки начала и охватывающий этот сегмент, определён углом $2\pi/3$. Поверхность сегмента составляет ¼ поверхности сферы, а так как она описана вершиной треугольника дважды, её следует понимать как сложенную вдвое оболочку, охватывающую пространство, равное 0.

б) Если к точке начала приложена переменная x, трек описал форму, напоминающую эллипс, но не соответствующую уравнению эллипса. Назовём её «протояйцо» (полученное здесь яйцо, описываемое векторным уравнением $x^2=x+1$,обладая помимо вертикальной оси симметрии ещё и горизонтальной, можно считать лишь прообразом яйца, но не его формой). Отношение вертикального диаметра «протояйца» к горизонтальному $\sqrt{5} : \sqrt{3}$.

Случай 3-ий. На вертикали константа x_O=1:

а) Если к точке начала приложена переменная x, трек описывает часто встречающуюся форму яблока правильной формы. Если реальное яблоко разрезать по вертикали и совместить плоскость разреза с плоскостью очерченной кривой на рис.7, точка начала роста живого яблока (центр завязи) совпадёт с точкой начала построения кривой (рис.5). Отношение вертикального диаметра к горизонтальному здесь $\sqrt{5}$: 2,663816...

б) Если к точке начала приложена переменная x^2, трек опишет ту же кривую, но зеркально опрокинутую, причём в этом случае точка начала окажется за пределами пространства, очерченного замкнутой кривой. Если рассматривать эту кривую совместно с точкой начала, то можно заметить, что треугольник со сторонами x^2, x и 1 описал форму морской раковины Pecten. Сходство обретает особую полноту, если обратить внимание на то, что каждое кольцо роста раковина повторило построенную кривую в разных масштабах (рис.6) и что точка начала роста раковины вновь совпала с точкой начала построения на чертеже.

Так появляется связь числа $\sqrt{\Phi}$ и форм в живой природе, причём форм далеко не случайных. Яблоко – плод, в котором возникает и созревает семя, несущее генетическую информацию об особи последующего поколения, а в пространстве, очерченном скорлупой яйца, совершается таинство возникновения нового существа. Ту же в принципе роль играет и раковина моллюска.

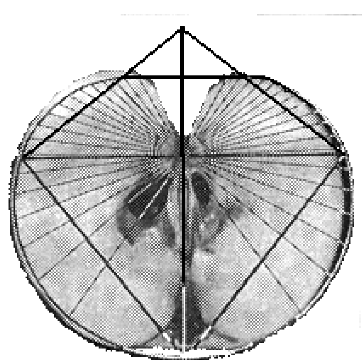

Рис. 5.

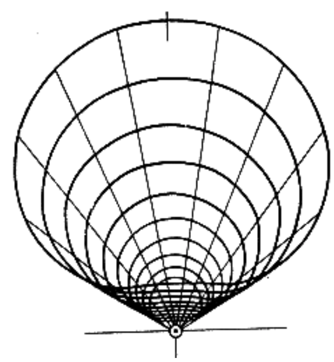

Рис.6

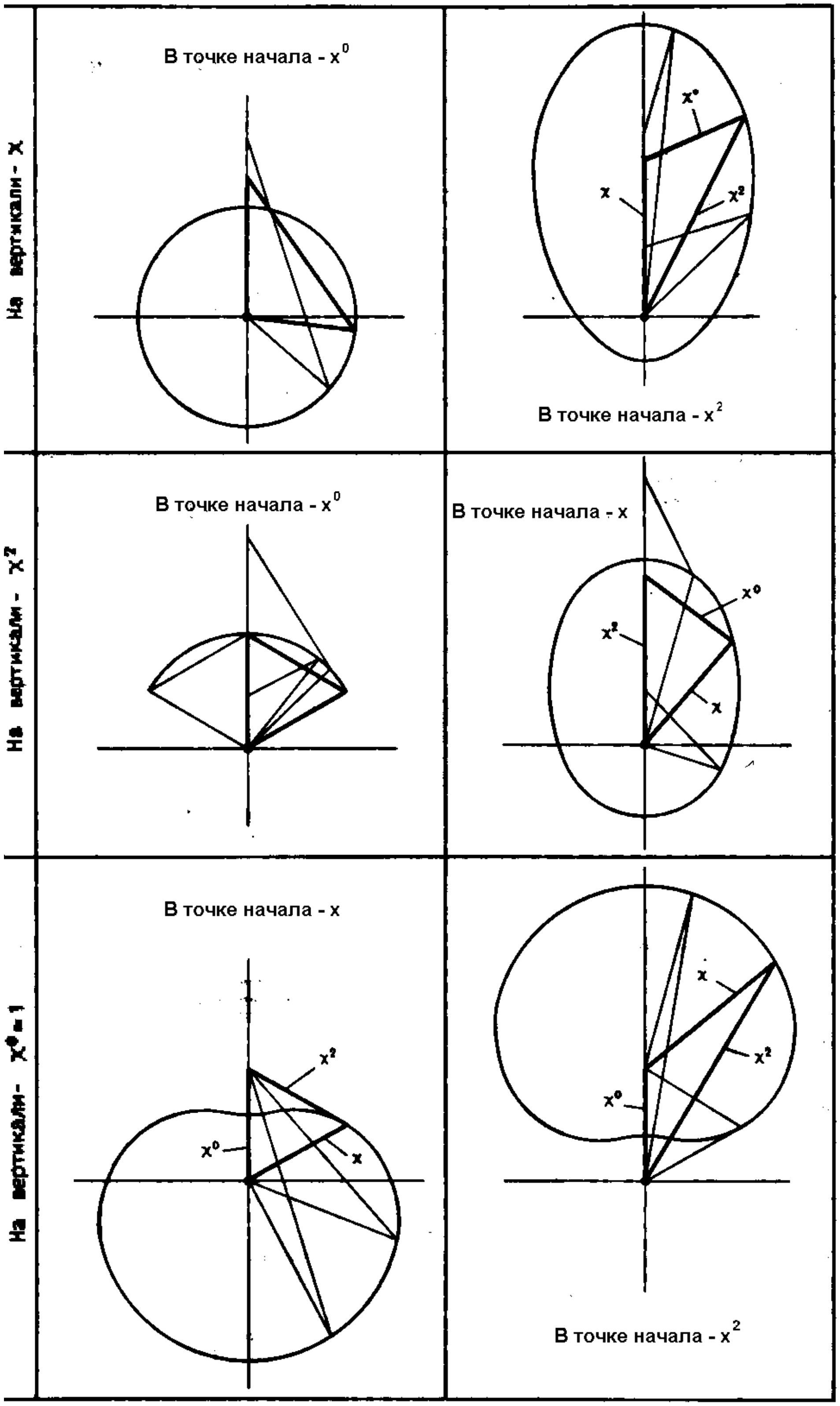

Рис.7 «живой» треугольник

2.2.3 Логарифмическая спираль.

Вернёмся к А-ромбу. Треугольник $Л_1NO_O$, подобный треугольнику $O_OO_1Л_1$, можно получить следующим образом (рис.2 и рис.8). На стороне $Л_1П_1$ отложить подобный ему треугольник так, чтобы сторона $Л_1N$ стала меньшим катетом, а гипотенуза полученного подобного треугоьника лежала на стороне $Л_1N$. При этом мерность треугольника со сторонами x^2, x и 1увеличилась в $\sqrt{Ф}$ раз. Продолжим такую цепь построений до бесконечности. Вершины полученных треугольников очерчивают логарифмическую спираль

$$R = Ф^{1/2} e^{\alpha \frac{2 \ln Ф^{1/2}}{\pi}}.$$

Рис.8

Эта спираль часто встречается в природе и повторяет формы чешуек на сосновой шишке, спираль раковины моллюска Наутилуса (рис. 9), соцветия многих растений,

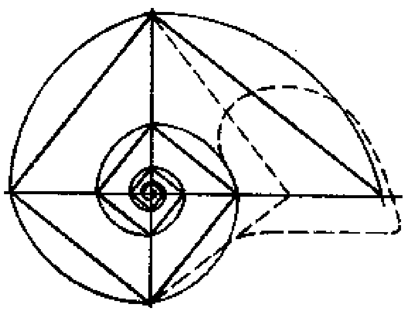

Рис.8

например, маргаритки или подсолнуха. Один из наиболее распространенных пауков, Эпейра, сплетая паутину, закручивает нити вокруг центра по логарифмической спирали. Спираль, если представить её как живой объект, возникающий из точки начала полярных координат, захватывает пространство по закону, представленному фундаментальными константами природы: иррациональное число $\sqrt{Ф}$, рациональное число 2, трансцендентные числа e,π.

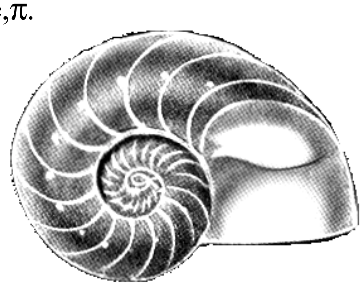

Рис.9

Существование спирали приводит к интересному выводу:

Число π можно заменить числом Ф:

$\pi=2^2:Ф^{1/2}$

3,1416≈3,1446

Таким образом, поворотная симметрия $\pi/2$ и закон изменения мерности $\Phi^{1/2}$ строят логарифмическую спираль $R = \Phi^{1/2} e^{\alpha \frac{2 \ln \Phi^{1/2}}{\pi}}$.

Логарифмическая спираль – единственный тип спирали, не меняющей своей формы при увеличении размеров. Это свойство и объясняет, почему логарифмическая спираль часто встречается в природе.

2.4 Уравнение экспансии – векторная основа формообразования.

Рассмотрим поподробнее уравнение экспансии, как возможную основу модели формообразования:

$$\vec{R} = \vec{S} + \vec{U},$$

Какие бы факторы ни слагались в понятие «потенция S», и какие бы ни составляющие ни составляли потенцию U, для геометрической модели существенно важно взаимодействие внутренней потенции S и внешней U; при этом: «+» - экспансия из центра вовне, «-» - извне в центр.

Предположение о степенной зависимости R от U: $|R| = |U^n|$, где $0 \leq |n| \leq \infty$, вытекает из того, что изменить величину U кроме неё самой ничто не может; а $|S| = \text{const} = 1$. В этом случае условие $|R| = |U^n|$ строит U-симметрии. Наряду с рассмотренными U-доминантными формами обнаруживаются S-доминантные формы, заданные условием $|R| = |S^n|$.

Уравнение экспансии продуцирует 8 типов симметрий (рис.10), дихотомично полярных: S-симметрии и U-симметрии, плюс-симметрии и минус-симметрии, прямые (n) и обратные (1/n). И одновременно с этим уравнение экспансии устанавливает алгоритм отношений сохранения и изменчивости. В симметриях U программа S сферична и форма объекта не тождественна программе $R \equiv \dot{S} \equiv S$. В симметриях U, напротив, программа не сферична, но форма R тождественна программе: $R \equiv \dot{S} \equiv S$. Перемена знаков тождественно – нетождественно отображает кардинальные различия дихотомично организованного процесса становления биологических объектов (см. рисунок).

Проведённые исследования биологических форм (реальных и в виде изображений) подтвердили соответствия рассмотренной векторной модели с высокой степенью точности:

симметрии –1/2U, -2U, -1U повторили форму коконов и личинок насекомых, форму семени фасоли;

симметрии –1/2S, -2S имели форму, характерную для яиц хищных птиц;

симметрии +2S, +1/2S рисуют очертание и годичные кольца моллюска Pecten, с высокой точностью очерчивают фронтальные проекции капсул, в которых заключён головной мозг позвоночных (рис.11), например, птиц, очерчивают форму яблока, тыквы, хурмы;

симметрия +2U воспроизводит формы, характерные для птиц утиных (рис.10).

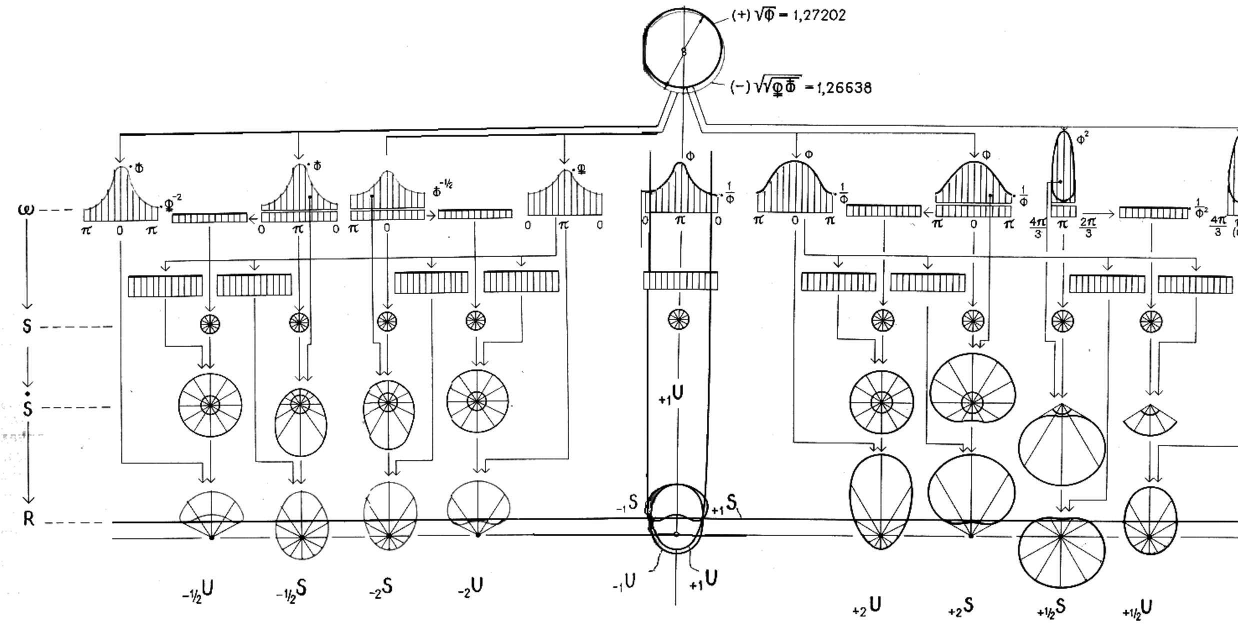

Рис.10 Модель формообразования.

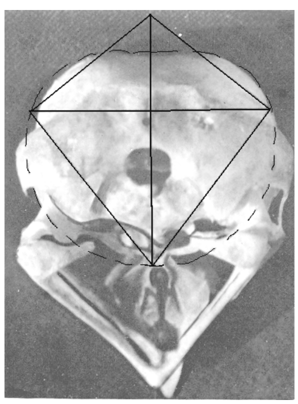

Рис.11

Заключение.

Исследование формообразования в данной работе потребовало особого подхода к понятию «форма» (с точки зрения векторной геометрии) и введения понятия «экспансия», то есть рассмотрения преобразований некоторой точки начала, обладающей свойствами пространства-вещества и нулевой мерностью в области пространства-вещества с действующими параметрами. Использование методологии золотого сечения и геометрического подобия в пространстве открывает путь к моделированию форм и живых структур.

Поэтапное моделирование включало в себя построение А-ромба, «живого» треугольника, логарифмической спирали, исследование уравнения экспансии с целью получения 8 типов симметрий: S-симметрии и U-симметрии, плюс-симметрии и минус-симметрии, прямые (n) и обратные (1/n). Представленная модель экспериментально проверена на соответствующих биологических объектах.

Проведённое исследование заставляет задуматься не только о том, что такое формообразование в природе, но и о том, почему феноменальный мир такой, как он есть, а не другой. Человечество должно заботиться о разнообразии и гармони биологических форм, сохраняя благоприятную экологическую обстановку.

Литература.

1. Стахов А. П. Коды золотой пропорции. – М., 1984.
2. Урманцев Ю. А. Симметрия природы и природа симметрий. – М., 1972.
3. Шевелёв И. Ш., Марутаев М. А., Шмелёв И. П. Золотое сечение: три взгляда на природу гармонии. – М.: Стройиздат, 1990.
4. Фёдоров Е. С. Деление плоскости и пространства. – Л., 1979.