В данной курсовой работе изучаются вопросы преобразований дифференциальной системы в случае сингулярных пучков матриц, а также исследуются общих решений дифференциальной системы.

1 Введение.

Даны четыре матрицы $A, B; A_1, B_1$ одинакового размера $m \times n$ с элементами из числового поля K. Требуется найти, при каких условиях существуют две квадратные невырожденные матрицы P и Q соответсвенно порядков m и n такие, что одновременно

$$PAQ = A_1, \quad PBQ = B_1 \tag{1}$$

Определение."Пучками матриц" будем называть $A + \lambda B$ и $A_1 + \lambda B_1$ где λ – комплексный параметр.

Таким образом, вводя в рассмотрение пучки матриц $A + \lambda B$ и $A_1 + \lambda B_1$ два матричных равенства (1) можно заменить одним равенством

$$P(A + \lambda B)Q = A_1 + \lambda B_1 \tag{2}$$

Определение. Два пучка прямоугольных матриц $A + \lambda B$ и $A_1 + \lambda B_1$ одного и того же размера $m \times n$, связанные равенством (2), в котором P и Q – постоянные (т.е. не зависят от λ)квадратные невырожденные матрицы соответсвенно порядков m и n, мы будем называть *строго эквивалентными.*

Если же матрицы P и Q зависят от λ, то пучки $A + \lambda B$ и $A_1 + \lambda B_1$ называются *эквивалентными.*

Рассмотрим пучок линейных операторов $A + \lambda B$ отображающих R^n в R^m. При определённом выборе базисов в этих пространсвах пучку операторов $A+\lambda B$ отвечает пучок прямоугольных матриц $A_1 + \lambda B_1$ (размера $m \times n$); приизменении базисов в R^n R^m пучок $A_1 + \lambda B_1$ заменяется строго эквивалентным пучком $P(A_1 + \lambda B_1)Q$, где P и Q – квадратные невырожденные матрицы порядков m и n. Таким образом критерий строгой эквивалентности даёт характеристику того класса пучков матриц $A_1+\lambda B_1$ (размера $m\times n$), которые описывают один и тот же пучок операторов $A+\lambda B$, отображающих R^n в R^m, при различных выборах базисов в этих пространствах.

Для получения канонической формы пучка нужно найти те базисы в R^n и R^m, в которой пучок операторов $A + \lambda B$ описывается возможно более простой матрицей.

Все пучки матриц $A+\lambda B$ размером $m\times n$ подразделяются на два основных типа: на *регулярные* и *сингулярные.*

Определение. Пучок матриц $A + \lambda B$ называется регулярным если:

1. A и B - квадратные матрицы одного и того же порядка n

2. определитель $|A + \lambda B|$ не равен тождественно нулю.

Во всех остальных случаях ($m \neq n$ или $m = n$, но $|A + \lambda B| = 0$) пучок называется сингулярным.

Определение. Многочленной матрицей наз матрица $A(\lambda)$, элементы которой есть многочлены от λ:

$$A(\lambda) = a_{ij}(\lambda) = (a_{ij}^{(0)}\lambda^l + a_{ij}^{(1)}\lambda^{l-1} + \ldots + a_{ij}^{(l-1)}\lambda + a_{ij}^{(l)}),$$
$$i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}$$

l – наибольшая из степеней $a_{ij}(\lambda)$

Введём понятие инвариантного многочлена λ-матрицы $A(\lambda)$. Пусть многочленная матрица $A(\lambda)$ имеет ранг r, т.е. в этой матрице имеются не равные тождественно нулю миноры r-го порядка, а все миноры порядка $> r$ равны нулю.

Обозначим через $D_j(\lambda)$ наибольший общий делитель для всех миноров j-го порядка матрицы $A(\lambda)$, $\quad j = \overline{1,r}$.

В каждом $D_j(\lambda)$ берём старший коэффициент равный 1, тогда в ряду

$$D_r(\lambda), D_{r-1}(\lambda), \ldots, D_0(\lambda) = 1$$

каждый многочлен делится без остатка на последующий. Соответствующие частные обозначим

$$i_1(\lambda) = \frac{D_r}{D_{r-1}}, \ldots, i_r(\lambda) = \frac{D_1}{D_0} = D_1(\lambda)$$

Определение. Многочлены $i_1(\lambda), \ldots, i_r(\lambda)$ определяемые предыдущей формулой называется *инвариантными многочленами* прямоугольной матрицы $A(\lambda)$

Разложим инвариантные многочлены $i_1(\lambda), \ldots, i_r(\lambda)$ на неприводимые в данном числовом поле множители:

$$\begin{cases} i_1(\lambda) = [\varphi_1(\lambda)]^{l_1}[\varphi_2(\lambda)]^{l_2} \ldots [\varphi_s(\lambda)]^{l_s}; \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ i_r(\lambda) = [\varphi_1(\lambda)]^{l_1}[\varphi_2(\lambda)]^{l_2} \ldots [\varphi_s(\lambda)]^{l_s}. \end{cases} \tag{3}$$

где $\varphi_1(\lambda), \ldots, \varphi_s(\lambda)$ все различны, неприводымые в поле K многочлены со старшими коэфициентами $= 1$ входящие в состав $i_1(\lambda), \ldots, i_r(\lambda)$

Определение. Все отличные от 1-й степени делители в разложении (3) называются элементарными делителями матрицы $A(\lambda)$ в поле K.

Теорема. Многочленная матрица $A(\lambda)$ размерности $m \times n$ всегда эквивалентна канонической диагональной матрице следующего вида

$$\begin{pmatrix} i_r(\lambda) & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & i_{r-1}(\lambda) & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & i_1(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

где r – ранг матрицы, а $i_1(\lambda), i_2(\lambda), \dots, i_r(\lambda)$ – инвариантные многочлены $A(\lambda)$, определяемые формулой

$$i_k(\lambda) = \frac{D_{r-k+1}}{D_r - k}, k = \overline{1, r},$$

D_j – наибольший общий делитель всех миноров j-го порядка матрицы $A(\lambda)$.

Рассмотрим частный случай, когда пучки $A+\lambda B$ и $A_1+\lambda B_1$ состоят из квадратных матриц $(m = n)$ и $|B| \neq 0, |B_1| \neq 0$. В этом случае справедлива теорема:

Теорема 1. Два пучка квадратных матриц одного и того же порядка $A + \lambda B$ и $A_1 + \lambda B_1$, у которых $|B| \neq 0$ и $|B_1| \neq 0$, являются строго эквивалентными в том и только том случае, когда эти пучки имеют одни и те же элементарные делители в поле K.

Пример.

$$A+\lambda B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, A_1+\lambda B_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Здесь каждый из пучков $A + \lambda B$ и $A_1 + \lambda B_1$ имеет только один конечный элементарный делитель $\lambda+1$. В то же время эти пучки не являются строго эквивалентными, так как матрицы B и B_1 имеют соответсвенно ранги 2 и 1, а из равенства (2), если бы оно имело место, следовало бы, что ранги матриц B и B_1 совпадают. При этом пучки (4) являются регулярными согласно определению, так как

$$|A + \lambda B| \equiv |A_1 + \lambda B_1| \equiv \lambda + 1$$

Т.е. разобранный пример показывает, что при условии $|B| = 0$, теорема 1 неверна.

Для того чтобы сохранить теорему 1 введём понятие *бесконечных* элементарных делителей. Будем пучок $A + \lambda B$ задавать при помощи однородных параметров $\lambda, \mu:\ \mu A + \lambda B$. Тогда определитель $\Delta(\lambda, \mu) \equiv |\mu A + \lambda B|$ будет однородной функцией параметров λ, μ. Определяя наибольший общий делитель $D_k(\lambda, \mu)$ всех миноров k-го порядка матрицы $\mu A + \lambda B$ $(k = \overline{1, n})$, получим инвариантные многочлены по известным формулам

$$i_1(\lambda, \mu) = \frac{D_n(\lambda, \mu)}{D_{n-1}(\lambda, \mu)},\ i_2(\lambda, \mu) = \frac{D_{n-1}(\lambda, \mu)}{D_{n-2}(\lambda, \mu)}$$

при этом все $D_k(\lambda,\mu)$ и $i_j(\lambda,\mu)$ – однородные относительно λ и μ многочлены. Разлагая ивариантные многочлены на степени неприводимых в поле K однородных многочленов, получим элементарные делители $e_\alpha(\lambda,\mu)$ $(\alpha = 1,2,\dots)$ пучка $\mu A+\lambda B$ в поле K.

Совершенно очевидно, что пологая $\mu = 1$ в $e_\alpha(\lambda,\mu)$, мы вернёмся к элементарным делителям $e_\alpha(\lambda)$ пучка $A+\lambda B$. Обратно, из каждого элементарного делителя e_α степени q пучка $A+\lambda B$ мы получим соответствующий элементарный делитель $e_\alpha(\lambda,\mu)$ по формуле $e_\alpha(\lambda,\mu) = \mu^q e_\alpha(\frac{\lambda}{\mu})$. Таким способом могут быть получены все элементарные делители пучка $\mu A+\lambda B$, за исключением элементарных делителей вида μ^q.

Элементарные делители вида μ^q существуют только в том и только в том случае, когда $|B| = 0$, и носят название *бесконечных* элементарных делителей для пучка $A+\lambda B$.

Поскольку из строгой эквивалентности пучков $A+\lambda B$ и $A_1+\lambda B_1$ следует строгая эквивалентность пучков $\mu A+\lambda B$ и $\mu A_1+\lambda B_1$, то у строго эквивалентных пучков $A+\lambda B$ и $A_1+\lambda B_1$ должны совпадать не только *конечные*, но и *бесконечные* делители.

Итак мы пришли к теореме:

Критерий эквивалентности пучков. Два пучка $A+\lambda B$ и $A_1+\lambda B_1$ являются эквивалентными тогда и только тогда, когда совпадают конечные и бесконечные элементарные делители.

Пусть теперь дан произвольный регулярный пучок $A+\lambda B$. Тогда существует такое число c что $|A+cB| \neq 0$. Данный пучок представим в виде $A_1+(\lambda-c)B$, где $A_1 = cB$, и потому $|A_1| \neq 0$. Умножим пучок слева на $A_1^{-1}:\ E+(\lambda-c)A_1^{-1}B$. Преобразованием подобия приводим этот пучок к виду

$$E+(\lambda-c)\{J_0,J_1\} = \{E-cJ_0+\lambda J_0, E-cJ_1+\lambda J_1\}$$

где $\{J_0,J_1\}$ – квзидиагональная нормальная форма матрицы $A_1^{-1}B,\ J_0$ – жорданова нильпотентная (т.е. $J_0^l = 0$ при некотором целом $l>0$) матрица, а $|J_1| \neq 0$.

Первый диагональный блок правой части последней формулы умножим на $(E-cJ_0)^{-1}$. Получим $E+\lambda(E-cJ_0)^{-1}J_0$. Здесь коэфициент при λ – нильпотентная матрица [1] . Поэтому преобразованием подобия этот пучок можно привести к виду

$$E+\widehat{\lambda J_0} = \{N^{(u_1)},N^{(u_2)},\dots,N^{(u_s)}\}\ (N^{(u)} = E^{(u)}+\lambda H^{(u)}) \tag{5}$$

Где H матрица вида:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \dots & 1 \\ 0 & & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

[1] Из $J_0 = 0$ следует $[(E-cJ_0)^{-1}J_0]^l = 0$

Второй диагональный блок в правой части (7) умножим на J_1^{-1}, а затем преобразованием подобия может быть приведён к виду $J+\lambda E$, где J – матрица, имеющая нормальную форму, а E – единичная матрица. Мы пришли к теореме:

Теорема 3. Произвольный регулярный пучок $A+\lambda B$ может быть приведён к (строго эквивалентному) каноническому квазидиагональному виду

$$\{N^{(u_1)}, N^{(u_2)}, \dots, N^{(u_s)},\ J+\lambda E\}\ (N^{(u)}=E^{(u)}+\lambda H^{(u)})$$

где первые s диагональных блоков соответствуют бесконечным элементарным делителям $\mu^{u_1}, \mu^{u_2}, \dots, \mu^{u_s}$ пучка $A+\lambda B$, а нормальная форма последнего диагонального блока $J+\lambda E$ однозначно опеределяется конечными элементарными делителями данного пучка.

2 Сингулярные пучки.

Рассмотрим сингулярный пучок матриц $A+\lambda B$ Размера $(m\times n)$. Обозначим через r *ранг пучка*, т.е. наибольший из порядков миноров, не равных тожднственно нулю. Из сингулярности пучка следует, что всегда имеет место по крайней мере одно из неравенств $r<n$ или $r<m$. Пусть $r<n$. Тогда столбцы λ - матрицы $A+\lambda B$ линейно зависимы, т.е. уравнение

$$(A+\lambda B)x=0, \tag{6}$$

где x – искомый столбец, имеет ненулевое решение. Каждое ненулевое решение этого уравнения определяет некоторую линейную зависимость между столбцами λ - матрицы $A+\lambda B$. Мы ограничимся только теми решениями $x(\lambda)$ уравнения (6), которые являются многочленами относительно λ [2], и среди этих решений возьмём решение наименьшей степени ε

$$x(\lambda)=x_0-\lambda x_1+\lambda^2 x_2-\ldots+(-1)^{\varepsilon}\lambda x_{\varepsilon}\ \ (x_{\varepsilon}\neq 0) \tag{7}$$

Подставляя это решение в (6) и приравнивая нулю коэфициенты при степенях λ, получим

$$Ax_0=0,\ Bx_0-Ax_1=0,\ Bx_1-Ax_2=0,\dots,Bx_{\varepsilon-1}-Ax_{\varepsilon}=0, Bx_{\varepsilon}=0. \tag{8}$$

Рассматривая эту систему равенств как систему линейных однородных уравнений относительно элементов столбцов $x_0, -x_1, +x_2, \dots, (-1)^{\varepsilon}x_{\varepsilon}$, заключаем, что матрица

[2] Для определения элементов столбца x, удовлетворяющего уравнению (6)? приходится решать систему линейных однородных уравнений, у которых коэфициенты при неизвестных линейно зависят от λ. Базисные линейно независимые решения x всегда могут быть выбраны так, чтобы их элементами были многочлены от λ.

коэффициентов этой системы

$$M_\varepsilon = M_p[A+\lambda B] = \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} A & 0 & \dots & 0 \\ B & A & & 0 \\ 0 & B & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & A \\ 0 & 0 & \dots & B \end{matrix}}^{\varepsilon+1} \end{pmatrix} \tag{9}$$

имеет ранг $\rho_\varepsilon < (\varepsilon+1)n$. В то же время в силу минимального свойства числа ε для рангов $\rho_1, \dots, \rho_{\varepsilon-1}$ матриц

$$M_0 = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}, M_1 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & A \\ 0 & B \end{pmatrix}, \dots, M_{\varepsilon-1} = \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} A & 0 & \dots & 0 \\ B & A & & 0 \\ 0 & B & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & A \\ 0 & 0 & \dots & B \end{matrix}}^{\varepsilon} \end{pmatrix} \tag{10}$$

имеют место равенства $\rho_0 = n,\ \rho_1 = 2n,\ \rho_{\varepsilon-1} = \varepsilon n$.

Таким образом, число ε есть наименьшее значение индекса k, при котором в соотношении $\rho_k \leq (k+1)n$ имеет место знак $<$.

Теорема. Если уравнение (6) имеет решение минимальной степени ε и $\varepsilon > 0$, то данный пучок $A + \lambda B$ строго эквивалентен пучку вида

$$\begin{pmatrix} L_\varepsilon & 0 \\ 0 & A' + \lambda B' \end{pmatrix} \tag{11}$$

где

$$L_\varepsilon = \left.\begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \\ 0 & 0 & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & & \dots & \lambda & 1 \end{matrix}}^{\varepsilon+1} \end{pmatrix}\right\} \varepsilon, \tag{12}$$

а $A' + \lambda B'$ – пучок матриц, для которого уравнение, аналогичное (6), не имеет решений степени $< \varepsilon$.

Доказательство теоремы разобьём на три этапа. Сначала докажем, что данный пучок $A + \lambda B$ строго эквивалентен пучку вида

$$\begin{pmatrix} L_\varepsilon & D + \lambda F \\ 0 & A' + \lambda B' \end{pmatrix} \tag{13}$$

где $D,\ F,\ A_1,\ B_1$ – постоянные прямоугольные матрицы соответствующих размеров. Затем установим, что уравнение $(A'+\lambda B')x'=0$ не имеет решений $x'(\lambda)$ степени $<\varepsilon$. После этого мы покажем, что дальнейшими преобразованиями пучок (13) может быть приведён к квазидиоганальному виду (11).

1. Первую часть доказательства облечём в геометрическую форму. Вместо пучка матриц $A+\lambda B$ рассмотрим пучок операторов $A+\lambda B$ отображающих R^n в R^m, и покажем, что при надлежащем выборе базисов в этих пространствах матрица, соответствующая оператору $A+\lambda B$, будет иметь форму (13).

Вместо уравнения (6) возьмём веторное уранение

$$(A+\lambda B)x=0 \tag{14}$$

с векторным решением

$$x(\lambda)=x_0-\lambda x_1+\lambda^2 x_2-\ldots+(-1)^{\varepsilon}\lambda^{\varepsilon}x_{\varepsilon} \tag{15}$$

равенства (8) заменяя векторными равенствами

$$Ax_0=0,\ Bx_0=Ax_1,\ Bx_1=Ax_2,\ldots,Bx_{\varepsilon-1}=Ax_{\varepsilon},\ Bx_{\varepsilon}=0. \tag{16}$$

Ниже мы докажем, что векторы

$$Ax_1,Ax_2,\ldots,Ax_{\varepsilon} \tag{17}$$

линейно независимы. Отсюда легко будет следовать линейная независимость векторов

$$x_0,x_1,\ldots,x_{\varepsilon} \tag{18}$$

Действительно, поскольку $Ax_0=0$, из $\alpha_0x_0+\alpha_1x_1+\ldots+\alpha_{\varepsilon}x_{\varepsilon}=0$ находим $\alpha_1Ax_1+\ldots+\alpha_{\varepsilon}Ax_{\varepsilon}=0$ откуда в силу линейной зависимости векторов (17) $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_{\varepsilon}$. Но $x_0\neq 0$, поскольку в противном случае $\frac{1}{\lambda}x(\lambda)$ было бы решением уранения (14) степени $\varepsilon-1$, что невозможно. Поэтому и $\alpha_0=0$.

Если теперь принять векторы (17) и (18) в качестве первых базисных векторов для новых базисов соответсвенно в R^m и R^n, то в новых базисах операторам A и B в силу (16) будут соответствовать матрицы

$$\widetilde{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \ldots & 0 & * & \ldots & * \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & * & \ldots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & & & \\ 0 & 0 & & \ldots & 1 & * & \ldots & * \\ 0 & 0 & & \ldots & 0 & * & \ldots & * \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & & \ldots & 0 & * & \ldots & * \end{pmatrix},\ \widetilde{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & * & \ldots & * \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & * & \ldots & * \\ \vdots & & \ddots & & & & & \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & * & \ldots & * \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & * & \ldots & * \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & * & \ldots & * \end{pmatrix};$$

тогда $\lambda-$ матрица $\widetilde{A}+\lambda\widetilde{B}$ будет иметь вид (13). Все предыдущие рассуждения будут обоснованными если мы докажем, что векторы (17) линейно независимы. Допустим противное, и пусть Ax_h $(h \geq 1)$ – первый в ряду (17) вектор, линейно зависящий от предыдущих векторов:

$$Ax_h = \alpha_1 Ax_{h-1} + \alpha_2 Ax_{h-2} + \ldots + \alpha_{h-1} Ax_1$$

В силу (16) это равенство может быть переписано так:

$$Bx_{h-1} = \alpha_1 Bx_{h-2} + \alpha_2 Bx_{h-3} + \ldots + \alpha_{h-1} Bx_0$$

т.е.

$$Bx^*_{h-1} = 0$$

где

$$x^*_{h-1} = x_{h-1} - \alpha_1 x_{h-2} - \alpha_2 x_{h-3} - \ldots - \alpha_{h-1} x_0.$$

Далее опять в силу (16)

$$Ax^*_{h-1} = B(x_{h-2} - \alpha_1 x_{h-3} - \ldots - \alpha_{h-2} x_0) = Bx^*_{h-2}$$

где

$$x^*_{h-2} = x_{h-2} - \alpha_1 x_{h-3} - \ldots - \alpha_{h-2} x_0.$$

Продолжая этот процесс далее и вводя ещё векторы

$$x^*_{h-3} = x_{h-3} - \alpha_1 x_{h-4} - \ldots - \alpha_{h-3} x_0,\ x^*_1 = x_1 - \alpha_1 x_0,\ x^*_0 = x_0$$

Мы получим цепочку равенств

$$Bx^*_{h-1} = 0,\ Ax^*_{h-1} = Bx^*_{h-2}, \ldots, Ax^*_1 = Bx^*_0,\ Ax^*_0 = 0. \tag{19}$$

Из (19) следует, что

$$x^*(\lambda) = x^*_0 - \lambda x^*_1 + \ldots + (-1)^{h-1} x^*_{h-1} \quad (x^*_0 = x_0 \neq 0)$$

есть ненулевое решение уравнения (14) степени $\leq h-1 < \varepsilon$, что невозможно. Таким образом, векторы (17) линейно независимы.

2. Докажем теперь, что уравнение $(\widetilde{A}+\lambda\widetilde{B})\widetilde{x} = 0$ не имеет решений степени $< \varepsilon$. Сначала обратим внимание на то, что уравнение $L_\varepsilon y = 0$, как и уравнение (6), имеет ненулевое решение наименьшей степени ε. В этом можно убедиться непосредственно, если матричное уравнение $L_\varepsilon y = 0$ заменить системой обыкновенных линейных уравнений

$$\lambda y_1 + y_2 = 0, \lambda y_2 + y_3 = 0, \ldots, \lambda y_\varepsilon + y_{\varepsilon+1}$$

$[y = (y_1, y_2, \ldots, y_{\varepsilon+1})]$, откуда $y_k = (-1)^{k-1} y_1 \lambda^{k-1} \quad (k = 1, 2, \ldots, \varepsilon + 1)$.

С другой стороны, если пучок имеет "треугольный"вид (13), то соответствующие этому пучку матрицы $M_k (k = 0, 1, \ldots, \varepsilon)$ после надлежащей перестановки строк и столбцов также могут быть приведены к треугольному виду

$$\begin{pmatrix} M_k[L_\varepsilon] & M_k[D + \lambda F] \\ 0 & M_k[\widetilde{A} + \lambda \widetilde{B}] \end{pmatrix}. \tag{20}$$

При $k = \varepsilon - 1$ все столбцы этой матрицы, а значит и столбцы матрицы $M_{\varepsilon-1}[L_\varepsilon]$, линейно независимы [3]. Но $M_{\varepsilon-1}[L_\varepsilon]$ квадратная матрица порядка $\varepsilon(\varepsilon+1)$. Поэтому и в матрице $M_{\varepsilon-1}[\widetilde{A} + \lambda \widetilde{B}]$ все столбцы линейно линейно независимы, а это, как было выяснено в начале параграфа, означает, что уравнение $(\widetilde{A} + \lambda \widetilde{B})\widetilde{x} = 0$ не имеет решений степени $\leq \varepsilon - 1$, что и требовалось доказать.

3. Заменим пучок (13) строго эквивалентным ему пучком

$$\begin{pmatrix} E_1 & Y \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_\varepsilon & D + \lambda F \\ 0 & \widetilde{A} + \lambda \widetilde{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_\varepsilon & D + \lambda F + Y(\widetilde{A} + \lambda \widetilde{B} - L_\varepsilon X) \\ 0 & \widetilde{A} + \lambda \widetilde{B} \end{pmatrix}, \tag{21}$$

где E_1, E_2, E_3, E_4 – квадратные единичные матрицы соответственно порядков $\varepsilon,\ m - \varepsilon,\ \varepsilon + 1,\ n - \varepsilon - 1$, а $X,\ Y$ – произвольные постоянные матрицы соответствующих размеров. Наша теорема будет полностью доказана, если мы покажем, что матрицы X и Y могут быть выбраны так, чтобы имело место матричное равенство

$$L_\varepsilon X = D + \lambda F + Y(\widetilde{A} + \lambda \widetilde{B}). \tag{22}$$

Введём обозначения для элементов матриц $D,\ F,\ X$, а также для строк матрицы Y и для столбцов матриц $\widetilde{A},\ \widetilde{B}$:

$$D = ||d_{ik}||,\ F = ||f_{ik}||,\ X = ||x_{jk}||$$

$$(i = 1, 2, \ldots, \varepsilon;\ k = 1, 2, \ldots, n - \varepsilon - 1;\ j = 1, 2, \ldots, \varepsilon + 1),$$

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_\varepsilon \end{pmatrix}, \widetilde{A} = (a_1, a_2, \ldots, a_{n-\varepsilon-1}),\ \widetilde{B} = (b_1, b_2, \ldots, b_{n-\varepsilon-1}).$$

Тогда матричное уранение (22) можно заменить системой скалярных уравнений, записывая, что элементы k-го столбца в левой и правой частях равенства (22) соответственно равны друг другу $(k = 1, 2, \ldots, n - \varepsilon - 1)$:

[3] Это следует из того, что ранг матрицы (20) при $k = \varepsilon - 1$ равен εn; аналогичное равнство имеет место для ранга $M_{\varepsilon-1}[L_\varepsilon]$.

$$
\begin{aligned}
x_{2k} + \lambda x_{1k} &= d_{1k} + \lambda f_{1k} + y_1 a_k + \lambda y_1 b_k \\
x_{3k} + \lambda x_{2k} &= d_{2k} + \lambda f_{2k} + y_2 a_k + \lambda y_2 b_k \\
x_{4k} + \lambda x_{3k} &= d_{3k} + \lambda f_{3k} + y_3 a_k + \lambda y_3 b_k \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
x_{\varepsilon+1,k} + \lambda x_{\varepsilon k} &= d_{\varepsilon k} + \lambda f_{\varepsilon k} + y_\varepsilon a_k + \lambda y_\varepsilon b_k \\
&(k = 1, 2, \dots, n - \varepsilon - 1)
\end{aligned}
\tag{23}
$$

.

В левых частях этих равенств стоят линейные двучлены относительно λ. Свободный член каждого из первых $\varepsilon - 1$ этих двучленов равен коэфициенту при λ в следующем двучлене. Но тогда и правые части должны удовлетворять этому условию. Поэтому

$$
\begin{aligned}
y_1 a_k - y_2 b_k &= f_{2k} - d_{1k}, \\
y_2 a_k - y_3 b_k &= f_{3k} - d_{2k}, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
y_{\varepsilon-1} a_k - y_\varepsilon b_k &= f_{\varepsilon k} - d_{\varepsilon-1,k}, \\
k &= 1, 2, \dots, n - \varepsilon - 1.
\end{aligned}
\tag{24}
$$

Если равенства (24) имют место, то, очевидно, из (23) можно определить искомые элементы матрицы X.

Теперь осталось показать, что система уранений (24) относительно элементов матрицы Y всегда имеет решение при любых d_{ik} и f_{ik} $(i = 1, 2, \dots, \varepsilon;\ k = 1, 2, \dots, n-\varepsilon-1)$. Действительно, матрица, составленная из коэфициентов при неизвестных элементах строк $y_1,\ -y_2,\ +y_3,\ -y_4,\ \dots$, может быть записана после транспонирования в виде

$$
\left(
\begin{array}{c}
\overbrace{\hphantom{\widetilde{A} \quad 0 \quad \dots \quad 0}}^{\varepsilon-1} \\
\begin{matrix}
\widetilde{A} & 0 & \dots & 0 \\
\widetilde{B} & \widetilde{A} & & \vdots \\
0 & \widetilde{B} & \ddots & \\
\vdots & & \ddots & \widetilde{A} \\
0 & 0 & \dots & \widetilde{B}
\end{matrix}
\end{array}
\right)
$$

Но эта матрица является матрицей $M_{\varepsilon-2}$ для пучка прямоугольных матриц $\widetilde{A} + \lambda\widetilde{B}$. Ранг же этой матрицы равен $(\varepsilon - 1)(n - \varepsilon - 1)$, поскольку по доказанному уравнение $(\widetilde{A}+\lambda\widetilde{B})\widetilde{x} = 0$ не имеет решений степени $< \varepsilon$. Таким образом, ранг системы уравнений (24) равен числу уравнений, а такая система при любых свободных членах является совместной (непротиворечивой).

Теорема доказана.

3 Каноническая форма сингулярного пучка матриц.

Пусть дан произвольный сингулярный пучок матриц $A+\lambda B$ размера $m\times n$. Допустим сначала, что как между столбцами, так и между строками этого пучка нет линейной зависимости с постоянными коэффициентами.

Пусть $r < n$, где r – ранг пучка, т.е. столбцы пучка $A + \lambda B$ линейно зависимы. В этом случае уравнение $(A + \lambda B)x = 0$ имеет ненулевое решение минимальной степени ε_1. Из принятого в начале ограничения следует что $\varepsilon > 0$. Поэтому, согласно предыдущей теореме, данный пучок можно преобразовать к виду

$$\begin{pmatrix} L_{\varepsilon_1} & 0 \\ 0 & A_1 + \lambda B_1 \end{pmatrix},$$

где уравнение $(A_1 + \lambda B_1)x^{(1)} = 0$ не имеет решений $x^{(1)}$ степени $< \varepsilon_1$.

Если это уравнение имеет ненулевое решение минимальной степени ε_2 (при этом непременно $\varepsilon_2 \geq \varepsilon_1$), то, применяя к пучку $A_1+\lambda B_1$ предыдущую теорему, мы данный пучок преобразуем к виду

$$\begin{pmatrix} L_{\varepsilon_1} & 0 & 0 \\ 0 & L_{\varepsilon_2} & 0 \\ 0 & 0 & A_2 + \lambda B_2 \end{pmatrix}$$

Продолжая процесс далее, мы приведём данный пучок к квазидиагональному виду

$$\begin{pmatrix} L_{\varepsilon_1} & & & & 0 \\ & L_{\varepsilon_2} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & L_{\varepsilon_p} & \\ 0 & & & & A_p + \lambda B_p \end{pmatrix} \tag{25}$$

где $0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 \leq \ldots \leq \varepsilon_p$, а уравнение $(A_p + \lambda B_p)x^{(p)} = 0$ не имеет ненулевых решений, т.е. столбцы матрицы $A_p + \lambda B_p$ линейно независимы.

Если строки пучка $A_p + \lambda B_p$ линейно зависимы, то транспонированный пучок $\widehat{A}_p + \lambda \widehat{B}_p$ может быть приведён к виду (25), где вместо чисел $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p$ будут фигурировать числа $0 < \eta_1 \leq \eta_2 \leq \ldots \leq \eta_q$. Но тогда данный пучок $A + \lambda B$ окажется преобразованным к квазидиагональному виду

$$
\begin{pmatrix}
L_{\varepsilon_1} & & & & & & & & & 0 \\
& L_{\varepsilon_2} & & & & & & & & \\
& & \ddots & & & & & & & \\
& & & L_{\varepsilon_p} & & & & & & \\
& & & & \widehat{L}_{\eta_1} & & & & & \\
& & & & & \widehat{L}_{\eta_2} & & & & \\
& & & & & & \ddots & & & \\
& & & & & & & \widehat{L}_{\eta_q} & & \\
0 & & & & & & & & & A_0 + \lambda B_0
\end{pmatrix} \tag{26}
$$

$$
(0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 \leq \ldots \leq \varepsilon_p,\ 0 < \eta_1 \leq \eta_2 \leq \ldots \leq \eta_q)
$$

где у пучка $A_0 + \lambda B_0$ как столбцы, так и строки линейно независимы, т.е. $A_0 + \lambda B_0$ – регулярный пучок.

Рассмотрим теперь общий случай, когда строки и столбцы данного пучка могут быть связаны линейными зависимостями с постоянными коэффициентами. Обозначим максимальное число постоянных независимых решений уравнений

$$
(A + \lambda B)x = 0, \quad (\widehat{A} + \lambda \widehat{B})y = 0
$$

соответственно через g и h. Вместо первого из этих уравнений, подобно тому как мы это делали при доказательстве предыдущей теоремы, рассмотрим соответствующее векторное уравнение $(A + \lambda B)x = 0$ (A и B – операторы отображающие R^n в R^m). Линейно независимые постоянные решения этого уравнения обозначим через $e_1, e_2, \ldots, e_g$ и примем за первые базисные векторы в R^n. Тогда в соответствующей матрице $\widetilde{A} + \lambda \widetilde{B}$ первые g столбцов будут состоять из нулей:

$$
\begin{pmatrix} \overbrace{\ 0\ }^{g} & \widetilde{A_1} + \lambda \widetilde{B_1} \end{pmatrix} \tag{27}
$$

Совершенно так же в пучке $\widetilde{A_1} + \lambda \widetilde{B_1}$ первые h строк можно сделать нулевыми. Тогда данный пучок примет вид

$$
\begin{pmatrix} h\{\overbrace{\ 0\ }^{g} & 0 \\ 0 & A^0 + \lambda B^0 \end{pmatrix} \tag{28}
$$

где строки и столбцы пучка $A^0 + \lambda B^0$ уже не связаны линейными зависимостями с постоянными коэфициентами. К пучку $A^0 + \lambda B^0$ применимо представления типа (28). Таким образом, в самом общем случае пучок $A + \lambda B$ всегда может быть приведен к каноническому квазидиагональному виду

$$
\{h\{\overbrace{\ 0\ }^{g}, L_{\varepsilon_{g+1}}, \ldots, L_{\varepsilon_p};\ \widehat{L}_{\eta_{h+1}}, \ldots, \widehat{L}_{\eta_g}, A_0 + \lambda B_0\}. \tag{29}
$$

Выбор индексов при ε и η связан с тем, что нам удобно здесь считать $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots = \varepsilon_g = 0$ и $\eta_1 = \eta_2 = \ldots = \eta_h = 0$.

Заменяя фигурирующий в (29) регулярный пучок $A_0 + \lambda B_0$ его канонической формой, получим окончательную следующую квазидиагональную матрицу:

$$\{h\{\overbrace{0}^{g}, L_{\varepsilon_{g+1}}, \ldots, L_{\varepsilon_p};\ \widehat{L}_{\eta_{h+1}}, \ldots, \widehat{L}_{\eta_g};\ N^{(u_1)}, \ldots, N^{(u_s)}, J + \lambda E\}. \tag{30}$$

где матрица J имеет жорданову нормальную форму, а $N^{(u)} = E^{(u)} + \lambda H^{(u)}$.

Матрица (30) представляет собой каноническую форму пучка $A + \lambda B$ в самом общем случае.

4 Приложение к дифферинциальным уранениям

Рассмотрим приложения полученных результатов к интегрированию системы m линейных дифференциальных уравнений первого порядка с n неизвестными функциями с постоянными коэфициентами:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k \ + \ \sum_{k=1}^{n} b_{ik}\frac{dx_k}{dt} = f_i(t)\ (i = 1, 2, \ldots, m), \tag{31}$$

или в матричной записи

$$Ax + B\frac{dx}{dt} = f(t); \tag{32}$$

здесь

$$A = ||a_{ik}||,\ B = ||b_{ik}||\ (i = 1, 2, \ldots, m; k = 1, 2, \ldots, n),$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$$

Предположим, что функция $f \in C[a; b]$.

Вводим новые неизвестные функции $z_1, z_2, \ldots, z_n$, связанные со старыми $x_1, x_2, \ldots, x_n$ линейным невырожденным преобразованием с постоянными коэфициентами:

$$x = Qz\ \left[z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}\right]\ |Q| \neq 0 \tag{33}$$

;

Кроме того, вместо уравнения (31) можно взять любые m независимых линейных комбинаций их, что равносильно умножению матриц A, B, f слева на квадратную невырожденную матрицу P m-го порядка. Подставляя Qz вместо x в (32) и умножая (32) слева на P, получим

$$\widetilde{A}z + \lambda\widetilde{B}\frac{dz}{dt} = \widetilde{f}(t), \tag{34}$$

где

$$\widetilde{A} = PAQ,\ \widetilde{B} = PBQ,\ \widetilde{f}(t) = Pf(t) = \begin{pmatrix} \widetilde{f}_1 \\ \widetilde{f}_2 \\ \vdots \\ \widetilde{f}_n \end{pmatrix} \tag{35}$$

При этом пучки матриц $A + \lambda B$ и $\widetilde{A} + \lambda\widetilde{B}$ строго эквивалентны друг другу:

$$\widetilde{A} + \lambda\widetilde{B} = P(A + \lambda B)Q. \tag{36}$$

Выберем матрицы P и Q так, чтобы пучок $\widetilde{A} + \lambda\widetilde{B}$ имел каноническую квазидиагональную форму:

$$\widetilde{A} + \lambda\widetilde{B} = \{0, L_{\varepsilon_{g+1}}, \dots, L_{\varepsilon_p}, L'_{\eta_{h+1}}, \dots, N^{(u_1)}, \dots, N^{(u_s)}, J + \lambda E\} \tag{37}$$

В соответствии с диагональными блоками в (37) система дифферинциальных уравнений распадается на $\nu = p - g + q - h + s + 2$ отлельных систем вида

$$0 \cdot z^{(1)} = \widetilde{f}^{(1)}(t), \tag{38}$$

$$L_{\varepsilon_{g+i}}(\frac{d}{dt}z^{(1+i)}) = \widetilde{f}^{(1+i)}(t) \qquad (i = 1, 2, \dots, p - g), \tag{39}$$

$$L'_{\eta_{h+j}}(\frac{d}{dt})z^{(p-g+1+j)} = \widetilde{f}^{(p-g+1+j)}(t) \qquad (j = 1, 2, \dots, q - h), \tag{40}$$

$$N^{(u_k)}(\frac{d}{dt})z^{(p-g+q-h+1+k)} = \widetilde{f}^{(p-g+q-h+1+k)}(t) \qquad (k = 1, 2, \dots, s), \tag{41}$$

$$(J + \frac{d}{dt})z^{(\nu)} = \widetilde{f}^{(\nu)}(t), \tag{42}$$

где

$$\begin{pmatrix} z^{(1)} \\ z^{(2)} \\ \vdots \\ z_{(\nu)} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \widetilde{f}^{(1)} \\ \widetilde{f}^{(2)} \\ \vdots \\ \widetilde{f}^{(\nu)} \end{pmatrix}, \tag{43}$$

$$z^{(1)} = (z_1, \dots, z_g),\ \widetilde{f}^{(1)} = (\widetilde{f}_1, \dots, \widetilde{f}_h),\ z^{(2)} = (z_{g+1}, \dots,),\ \widetilde{f}^{(2)} = (\widetilde{f}_{h+1}, \dots),\ \dots \tag{44}$$

$$\Lambda(\frac{d}{dt}) = A + B\frac{d}{dt}, \text{ если } \Lambda(\lambda) \equiv A + \lambda B \tag{45}$$

Таким образом, интегрирование системы (32) в самом общем случае сведено к интегрированию частных систем (38)–(42) такого же типа. В этих системах пучок матриц $A + \lambda B$ имеет соответственно вид $\{0,\ L_\varepsilon,\ \widehat{L_\eta},\ N^{(u)},\ J + \lambda E\}$.

1. Для того чтобы система (38) не была противоречивой, необходимо и достаточно, чтобы

$$\widetilde{f}^{(1)}(t) \equiv 0,$$

т.е.

$$\widetilde{f}_1(t) \equiv 0,\ \ldots,\ \widetilde{f}_h(t) \equiv 0. \tag{46}$$

В этом случае в качестве неизвестных функций $z_1, \ldots, z_g$, составляющих столбец $z_{(1)}$, могут быть взяты произвольные непрерывно дифференцируемые функции аргумента t.

2. Система (39) представляет собой систему вида

$$L_\varepsilon(\frac{d}{dt})z = \widetilde{f}, \tag{47}$$

или в подробной записи

$$\frac{dz_1}{dt} + z_2 = \widetilde{f}_1(t),\ \frac{dz_2}{dt} + z_3 = \widetilde{f}_2(t),\ \ldots,\ \frac{dz_\varepsilon}{dt} + z_{\varepsilon+1} = \widetilde{f}_\varepsilon(t)^4 \tag{48}$$

Такая система всегда совместна. Если в качестве $z_{\varepsilon+1}(t)$ взять произвольную непрерывно дифференцируемую функцию аргумента t, то последовательными квадратурами из (48) определятся все остальные неизвестные функции $z_\varepsilon,\ z_{\varepsilon-1},\ \ldots,\ z_1$.

3. Система (40) представляет собой систему вида

$$\widehat{L}_\eta(\frac{d}{dt})z = \widetilde{f}, \tag{49}$$

или в подробной записи

$$\frac{dz_1}{dt} = \widetilde{f}_1(t),\ \frac{dz_2}{dt} + z_1 = \widetilde{f}_2(t),\ \ldots,\ \frac{dz_\eta}{dt} + z_{\eta-1} = \widetilde{f}_\eta(t),\ \widetilde{z}_\eta = \widetilde{f}_{\eta+1}(t) \tag{50}$$

Из всех уравнений (50), кроме первого, мы однозначно определяем $z_\eta, z_{\eta-1}, \ldots, z_1$:

[4] Мы изменили индексы при z и $\widetilde{f}$ для упрощения обозначений. Для того чтобы от системы (48) вернуться к системе (39), нужно ε заменить на ε_i и к каждому индексу при z прибавить $g + \varepsilon_{g+1} + \ldots + \varepsilon_{g+i-1} + i - 1$, к каждому при $\widetilde{f}$ следует прибавить $h + \varepsilon_{g+1} + \ldots + \varepsilon_{g+i-1}$.

$$z_\eta = \widetilde{f}_{\eta+1},\ z_{\eta-1} = \widetilde{f}_\eta - \frac{d\widetilde{f}_{\eta+1}}{dt},\ \ldots,\ z_1 = \widetilde{f}_2 - \frac{d^2\widetilde{f}_3}{dt^2} + \ldots + (-1)^{\eta-1}\frac{d^{\eta-1}\widetilde{f}_{\eta+1}}{dt^{\eta-1}}. \quad (51)$$

Подставляя полученное выражение для z_1 в первое уравнение, получаем условие совместимости

$$\widetilde{f}_1 - \frac{d\widetilde{f}_2}{dt} + \frac{d^2\widetilde{f}_3}{dt^2} - \ldots + (-1)^\eta \frac{d^\eta \widetilde{f}_{\eta+1}}{dt^\eta} = 0. \quad (52)$$

4. Сиситема (41) представляет собой систему вида

$$N^{(u)}(\frac{d}{dt})z = \widetilde{f}, \quad (53)$$

или в подробной записи

$$\frac{dz_2}{dt} + z_1 = \widetilde{f}_1,\ \frac{dz_3}{dt} + z_2 = \widetilde{f}_2,\ \ldots,\ \frac{dz_u}{dt} + z_{u-1} = \widetilde{f}_{u-1},\ z_u = \widetilde{f}_u, \quad (54)$$

Отсюда последовательно однозначно определяем решение

$$z_u = \widetilde{f}_u,\ z_{u-1} = \widetilde{f}_{u-1} - \frac{d\widetilde{f}_u}{dt},\ \ldots,\ z_1 = \widetilde{f}_1 - \frac{d\widetilde{f}_2}{dt} + \frac{d^2\widetilde{f}_3}{dt^2} - \ldots + (-1)^{u-1}\frac{d^{u-1}\widetilde{f}_u}{dt^{u-1}}. \quad (55)$$

5. Система (42) представляет собой систему вида

$$Jz + \frac{dz}{dt} = \widetilde{f}. \quad (56)$$

Как известно общее решение такой системы имеет вид

$$z = e^{-Jtz_0} + \int_0^t e^{-J(t-\tau)}(\tau)d\tau; \quad (57)$$

здесь z_0 — столбец с произвольными элементами (начальными значениями неизвестных функций при $t = 0$).

Обратный переход от системы (34) к системе (32) осуществляется по формулам (33) и (35), согласно которым каждая из функций $x_1, \ldots, x_n$ является линейной комбинацией функций $z_1, \ldots, z_n$, а каждая из функций $\widetilde{f}_1(t), \ldots, \widetilde{f}_m(t)$ линейно (с постоянными коэфициентами) выражается через функции $f_1(t), \ldots, f_m(t)$.

Проведённый анализ показывает, что для совместности системы (31) в общем случае должны выполняться некоторые определённые линейные конечные и дифферинциальные зависимости (с постоянными коэфициентами) между правыми частями уравнений.

Если эти условия выполнены, то общее решение системы содержит (в общем случае) линейно как произвольные постоянные, так и произвольные функции.

Характер условий совместности и характер решений (в частности количество произвольных постоянных и произвольных функций) определяются минимальными индексами и элементарными делителями пучка $A + \lambda B$, поскольку от этих индексов и делителей зависит каноническая форма системы дифферинциальных уравнений (38) — (42).

5 Пример.

Требуется решить систему 11 линейных дифферинциальных уравнений 1-го порядка с 12 неизвестными функциями с постоянными коэффициентами.

$$Ax + B\frac{dx}{dt} = f(t) \tag{58}$$

где A и B матрицы вида:

$$A = \begin{pmatrix} 22 & -7 & 31 & -41 & -44 & -19 & -26 & 4 & 12 & 15 & -42 & 2 \\ 10 & -4 & 16 & -29 & -19 & 10 & -33 & -26 & 32 & 6 & 13 & 41 \\ 8 & -3 & 19 & -19 & -20 & -10 & -14 & 6 & 6 & 5 & -22 & 1 \\ 22 & -10 & 10 & -28 & -18 & -8 & 7 & 15 & -3 & 12 & -42 & -20 \\ -17 & 5 & -4 & 36 & 16 & -29 & 34 & 47 & -43 & -12 & -30 & -59 \\ -19 & 6 & -28 & 42 & 39 & 7 & 34 & 10 & -26 & -13 & 22 & -22 \\ 13 & -8 & 17 & -34 & -21 & 20 & -40 & -38 & 40 & 5 & 19 & 50 \\ -14 & 4 & -1 & 37 & 11 & -41 & 42 & 61 & -57 & -10 & -50 & -79 \\ 13 & -3 & 15 & -23 & -21 & -14 & -5 & 13 & 3 & 10 & -32 & -8 \\ 2 & -2 & -1 & -4 & 2 & 10 & -4 & -10 & 8 & 0 & 9 & 11 \\ -4 & 6 & 11 & -6 & -18 & -14 & -14 & 10 & 4 & 2 & -17 & -1 \end{pmatrix}$$
$$B = \begin{pmatrix} -33 & 17 & 26 & 14 & -26 & -5 & -66 & -29 & 23 & -16 & 30 & 49 \\ 15 & -11 & -10 & -17 & 11 & 14 & 15 & -6 & 7 & 4 & 3 & 3 \\ -29 & 12 & 29 & 14 & -35 & -9 & -66 & -24 & 19 & -17 & 16 & 32 \\ -16 & 8 & 14 & 10 & -20 & 3 & -42 & -23 & 10 & -8 & 19 & 27 \\ -45 & 26 & 55 & 23 & -68 & -32 & -103 & -22 & 19 & -19 & 0 & 36 \\ 6 & -3 & -11 & 7 & 14 & -8 & 34 & 25 & -20 & 3 & -19 & -35 \\ 35 & -22 & -13 & -34 & 9 & 22 & 26 & -10 & 9 & 13 & -6 & -3 \\ -72 & 40 & 70 & 44 & -80 & -45 & -135 & -26 & 22 & -32 & 11 & 50 \\ -22 & 12 & 17 & 11 & -21 & -2 & -47 & -20 & 13 & -10 & 19 & 31 \\ 14 & -9 & -7 & -9 & 4 & 8 & 14 & -1 & -2 & 5 & -5 & -9 \\ -19 & 14 & 19 & 7 & -20 & -10 & -40 & -8 & 15 & -5 & 13 & 27 \end{pmatrix} \tag{59}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{11} \end{pmatrix}, \ f(t) = \begin{pmatrix} -1+t \\ -t-t^2-e^t-6\,e^{(-t)} \\ 2-3\,t^2+8\,e^t+t+6\,e^{(-t)} \\ 1+6\,t-2\,t^2+11\,e^t+4\,e^{(-t)} \\ 1-2\,t^2+9\,e^t+2\,t+14\,e^{(-t)} \\ -4\,t+t^2-7\,e^t-e^{(-t)} \\ -1-2\,t^2-4\,e^t+3\,t-9\,e^{(-t)} \\ 1-2\,t+4\,e^t+6\,e^{(-t)} \\ 1-t^2+10\,e^t+3\,t+5\,e^{(-t)} \\ 2\,t+t^2+4\,e^t+5\,e^{(-t)} \\ 2\,t-t^2-2\,e^t-3\,e^{(-t)} \end{pmatrix}$$

Рассмотрим пучок матриц $A+\lambda B$:

$$A+\lambda B =$$

$$\begin{pmatrix} 22-33\lambda & -7+17\lambda & 31+26\lambda & -41+14\lambda & -44-26\lambda & -19-5\lambda & -26-66\lambda & 4-29\lambda & 12+23\lambda & 15-16\lambda & -42+30\lambda & 2+49\lambda \\ 10+15\lambda & -4-11\lambda & 16-10\lambda & -29-17\lambda & -19+11\lambda & 10+14\lambda & -33+15\lambda & -26-6\lambda & 32+7\lambda & 6+4\lambda & 13+3\lambda & 41+3\lambda \\ 8-29\lambda & -3+12\lambda & 19+29\lambda & -19+14\lambda & -20-35\lambda & -10-9\lambda & -14-66\lambda & 6-24\lambda & 6+19\lambda & 5-17\lambda & -22+16\lambda & 1+32\lambda \\ 22-16\lambda & -10+8\lambda & 10+14\lambda & -28+10\lambda & -18-20\lambda & -8+3\lambda & 7-42\lambda & 15-23\lambda & -3+10\lambda & 12-8\lambda & -42+19\lambda & -20+27\lambda \\ -17-45\lambda & 5+26\lambda & -4+55\lambda & 36+23 & 16-68\lambda & -29-32\lambda & 34-103\lambda & 47-22\lambda & -43+19\lambda & -12-19\lambda & -30 & -59+36\lambda \\ -19+6\lambda & 6-3\lambda & -28-11\lambda & 42+7\lambda & 39+14\lambda & 7-8\lambda & 34+34\lambda & 10+25\lambda & -26-20\lambda & -13+3\lambda & 22-19\lambda & -22-35\lambda \\ 13+35\lambda & -8-22\lambda & 17-13\lambda & -34-34\lambda & -21+9\lambda & 20+22\lambda & -40+26\lambda & -38-10\lambda & 40+9\lambda & 5+13\lambda & 19-6\lambda & 50-3\lambda \\ -14-72\lambda & 4+40\lambda & -1+70\lambda & 37+44\lambda & 11-80\lambda & -41-45\lambda & 42-135\lambda & 61-26\lambda & -57+22\lambda & -10-32\lambda & -50+11\lambda & -79+50\lambda \\ 13-22\lambda & -3+12\lambda & 15+17\lambda & -23+11\lambda & -21-21\lambda & -14-2\lambda & -5-47\lambda & 13-20\lambda & 3+13\lambda & 10-10\lambda & -32+19\lambda & -8-31\lambda \\ 2+14\lambda & -2-9\lambda & -1-7\lambda & -4-9\lambda & 2+4\lambda & 10+8\lambda & -4+14\lambda & -10-\lambda & 8-2\lambda & 5\lambda & 9-5\lambda & 11-9\lambda \\ -4-19\lambda & 6+14\lambda & 11+19\lambda & -6+7\lambda & -18-20\lambda & -14-10\lambda & -14-40\lambda & 10-8\lambda & 4+15\lambda & 2-5\lambda & -17+13\lambda & -1+27\lambda \end{pmatrix}$$

Это сингулярный пучок т. к. количество строк и столбцов различно.

1 Приведём пучок к каноническому квазидиагональному виду, а для этого найдём ранг матрицы $M_0[A+\lambda B] = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$. Составляя эту матрицу, приводя её к верхнетреугольному виду получаем что матрица $M_0[A+\lambda B]$ имеет ранг равный $11 < (0+1)12$. Из выполнения последнего неравенства следует, что существует линейная зависимость с постоянными коэфициентами между столбцами матрицы M_0. Удоляя нулевые строки в этой матрице получаем приведённую матрицу $\widetilde{M_0}[A+\lambda B]$. Далее умножая справа на столбец $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{11} \end{pmatrix}$ и приравнивая результат к нулю получаем однородную систему линейных уравнений, решая которую, получаем следующий результат:

$$
\begin{cases}
x_1 = x_1; \\
x_2 = x_1; \\
x_3 = 0; \\
x_4 = 0; \\
x_5 = 0; \\
x_6 = 0; \\
x_7 = 0; \\
x_8 = 0; \\
x_9 = 0; \\
x_{10} = -x_1; \\
x_{11} = 0; \\
x_{12} = 0.
\end{cases}
$$

Таким образом, прибавляя к первому столбцу второй и вычитая десятый, мы получаем нулевой первый стлбец:

$$A + \lambda B =$$

$$
= \begin{pmatrix}
0 & -7+17\lambda & 31+26\lambda & -41+14\lambda & -44-26\lambda & -19-5\lambda & -26-66\lambda & 4-29\lambda & 12+23\lambda & 15-16\lambda & -42+30\lambda & 2+49\lambda \\
0 & -4-11\lambda & 16-10\lambda & -29-17\lambda & -19+11\lambda & 10+14\lambda & -33+15\lambda & -26-6\lambda & 32+7\lambda & 6+4\lambda & 13+3\lambda & 41+3\lambda \\
0 & -3+12\lambda & 19+29\lambda & -19+14\lambda & -20-35\lambda & -10-9\lambda & -14-66\lambda & 6-24\lambda & 6+19\lambda & 5-17\lambda & -22+16\lambda & 1+32\lambda \\
0 & -10+8\lambda & 10+14\lambda & -28+10\lambda & -18-20\lambda & -8+3\lambda & 7-42\lambda & 15-23\lambda & -3+10\lambda & 12-8\lambda & -42+19\lambda & -20+27\lambda \\
0 & 5+26\lambda & -4+55\lambda & 36+23 & 16-68\lambda & -29-32\lambda & 34-103\lambda & 47-22\lambda & -43+19\lambda & -12-19\lambda & -30 & -59+36\lambda \\
0 & 6-3\lambda & -28-11\lambda & 42+7\lambda & 39+14\lambda & 7-8\lambda & 34+34\lambda & 10+25\lambda & -26-20\lambda & -13+3\lambda & 22-19\lambda & -22-35\lambda \\
0 & -8-22\lambda & 17-13\lambda & -34-34\lambda & -21+9\lambda & 20+22\lambda & -40+26\lambda & -38-10\lambda & 40+9\lambda & 5+13\lambda & 19-6\lambda & 50-3\lambda \\
0 & 4+40\lambda & -1+70\lambda & 37+44\lambda & 11-80\lambda & -41-45\lambda & 42-135\lambda & 61-26\lambda & -57+22\lambda & -10-32\lambda & -50+11\lambda & -79+50\lambda \\
0 & -3+12\lambda & 15+17\lambda & -23+11\lambda & -21-21\lambda & -14-2\lambda & -5-47\lambda & 13-20\lambda & 3+13\lambda & 10-10\lambda & -32+19\lambda & -8-31\lambda \\
0 & -2-9\lambda & -1-7\lambda & -4-9\lambda & 2+4\lambda & 10+8\lambda & -4+14\lambda & -10-\lambda & 8-2\lambda & 5\lambda & 9-5\lambda & 11-9\lambda \\
0 & 6+14\lambda & 11+19\lambda & -6+7\lambda & -18-20\lambda & -14-10\lambda & -14-40\lambda & 10-8\lambda & 4+15\lambda & 2-5\lambda & -17+13\lambda & -1+27\lambda
\end{pmatrix}
$$

Т. к. $rank(M_0[A+\lambda B]) = 11$, то от линейной зависимости с постоянными коэффициентами между столбцов мы избавились. Проверим есть ли линейная зависимость с постоянными коэффициентами между строк. Для этого рассмотрим пучок $A_1 + \lambda B_1$, где

$$A_1 = \begin{pmatrix} -7 & 31 & -41 & -44 & -19 & -26 & 4 & 12 & 15 & -42 & 2 \\ -4 & 16 & -29 & -19 & 10 & -33 & -26 & 32 & 6 & 13 & 41 \\ -3 & 19 & -19 & -20 & -10 & -14 & 6 & 6 & 5 & -22 & 1 \\ -10 & 10 & -28 & -18 & -8 & 7 & 15 & -3 & 12 & -42 & -20 \\ 5 & -4 & 36 & 16 & -29 & 34 & 47 & -43 & -12 & -30 & -59 \\ 6 & -28 & 42 & 39 & 7 & 34 & 10 & -26 & -13 & 22 & -22 \\ -8 & 17 & -34 & -21 & 20 & -40 & -38 & 40 & 5 & 19 & 50 \\ 4 & -1 & 37 & 11 & -41 & 42 & 61 & -57 & -10 & -50 & -79 \\ -3 & 15 & -23 & -21 & -14 & -5 & 13 & 3 & 10 & -32 & -8 \\ -2 & -1 & -4 & 2 & 10 & -4 & -10 & 8 & 0 & 9 & 11 \\ 6 & 11 & -6 & -18 & -14 & -14 & 10 & 4 & 2 & -17 & -1 \end{pmatrix}$$

и

$$B_1 = \begin{pmatrix} 17 & 26 & 14 & -26 & -5 & -66 & -29 & 23 & -16 & 30 & 49 \\ -11 & -10 & -17 & 11 & 14 & 15 & -6 & 7 & 4 & 3 & 3 \\ 12 & 29 & 14 & -35 & -9 & -66 & -24 & 19 & -17 & 16 & 32 \\ 8 & 14 & 10 & -20 & 3 & -42 & -23 & 10 & -8 & 19 & 27 \\ 26 & 55 & 23 & -68 & -32 & -103 & -22 & 19 & -19 & 0 & 36 \\ -3 & -11 & 7 & 14 & -8 & 34 & 25 & -20 & 3 & -19 & -35 \\ -22 & -13 & -34 & 9 & 22 & 26 & -10 & 9 & 13 & -6 & -3 \\ 40 & 70 & 44 & -80 & -45 & -135 & -26 & 22 & -32 & 11 & 50 \\ 12 & 17 & 11 & -21 & -2 & -47 & -20 & 13 & -10 & 19 & 31 \\ -9 & -7 & -9 & 4 & 8 & 14 & -1 & -2 & 5 & -5 & -9 \\ 14 & 19 & 7 & -20 & -10 & -40 & -8 & 15 & -5 & 13 & 27 \end{pmatrix}$$

Для того чтобы выявить линейную зависимость с постоянными коэффициентами между строк, рассмотрим пучок $A_1^T + \lambda B_1^T$ и в нём найдём линейную зависимость столбцов.

Составим матрицу $M_0[A_1^T + \lambda B_1^T] = \begin{pmatrix} A_1^T \\ B_1^T \end{pmatrix}$ и найдём её ранг.

$rank(M_0[A_1^T + \lambda B_1^T]) = 10 < (0+1)11 \Rightarrow$ существует зависимость с постоянными коэффициентами между строк. Приведём матрицу $M_0[A_1^T + \lambda B_1^T]$ к верхнетреугольному виду, отбросим нулевые строки и умножим на столбец $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{11} \end{pmatrix}$. Решение полученной линейной однородной системы имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 = x_1; \\ x_2 = 0; \\ x_3 = 0; \\ x_4 = 0; \\ x_5 = x_1; \\ x_6 = x_1; \\ x_7 = 0; \\ x_8 = -x_1; \\ x_9 = 0; \\ x_{10} = 0; \\ x_{11} = 0; \\ x_{12} = 0. \end{cases}$$

Прибавляя к первой строке пучка $A_1 + \lambda B_1$ пятую, шестую и вычитая седьмую, получаем пучок с нулевой первой строкой

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4-11\lambda & 16-10\lambda & -29-17\lambda & -19+11\lambda & 10+14\lambda & -33+15\lambda & -26-6\lambda & 32+7\lambda & 6+4\lambda & 13+3\lambda & 41+3\lambda \\ 0 & -3+12\lambda & 19+29\lambda & -19+14\lambda & -20-35\lambda & -10-9\lambda & -14-66\lambda & 6-24\lambda & 6+19\lambda & 5-17\lambda & -22+16\lambda & 1+32\lambda \\ 0 & -10+8\lambda & 10+14\lambda & -28+10\lambda & -18-20\lambda & -8+3\lambda & 7-42\lambda & 15-23\lambda & -3+10\lambda & 12-8\lambda & -42+19\lambda & -20+27\lambda \\ 0 & 5+26\lambda & -4+55\lambda & 36+23 & 16-68\lambda & -29-32\lambda & 34-103\lambda & 47-22\lambda & -43+19\lambda & -12-19\lambda & -30 & -59+36\lambda \\ 0 & 6-3\lambda & -28-11\lambda & 42+7\lambda & 39+14\lambda & 7-8\lambda & 34+34\lambda & 10+25\lambda & -26-20\lambda & -13+3\lambda & 22-19\lambda & -22-35\lambda \\ 0 & -8-22\lambda & 17-13\lambda & -34-34\lambda & -21+9\lambda & 20+22\lambda & -40+26\lambda & -38-10\lambda & 40+9\lambda & 5+13\lambda & 19-6\lambda & 50-3\lambda \\ 0 & 4+40\lambda & -1+70\lambda & 37+44\lambda & 11-80\lambda & -41-45\lambda & 42-135\lambda & 61-26\lambda & -57+22\lambda & -10-32\lambda & -50+11\lambda & -79+50\lambda \\ 0 & -3+12\lambda & 15+17\lambda & -23+11\lambda & -21-21\lambda & -14-2\lambda & -5-47\lambda & 13-20\lambda & 3+13\lambda & 10-10\lambda & -32+19\lambda & -8-31\lambda \\ 0 & -2-9\lambda & -1-7\lambda & -4-9\lambda & 2+4\lambda & 10+8\lambda & -4+14\lambda & -10-\lambda & 8-2\lambda & 5\lambda & 9-5\lambda & 11-9\lambda \\ 0 & 6+14\lambda & 11+19\lambda & -6+7\lambda & -18-20\lambda & -14-10\lambda & -14-40\lambda & 10-8\lambda & 4+15\lambda & 2-5\lambda & -17+13\lambda & -1+27\lambda \end{pmatrix}$$

Т. к. $rank(M_0[A_1^T + \lambda B_1^T]) = 10 \Rightarrow$ мы избавились от линейной зависимости с постоянными коэффициентами между строк.

2 Рассмотрим пучок $A_2 + \lambda B_2$, где

$$A_2 = \begin{pmatrix} -4 & 16 & -29 & -19 & 10 & -33 & -26 & 32 & 6 & 13 & 41 \\ -3 & 19 & -19 & -20 & -10 & -14 & 6 & 6 & 5 & -22 & 1 \\ -10 & 10 & -28 & -18 & -8 & 7 & 15 & -3 & 12 & -42 & -20 \\ 5 & -4 & 36 & 16 & -29 & 34 & 47 & -43 & -12 & -30 & -59 \\ 6 & -28 & 42 & 39 & 7 & 34 & 10 & -26 & -13 & 22 & -22 \\ -8 & 17 & -34 & -21 & 20 & -40 & -38 & 40 & 5 & 19 & 50 \\ 4 & -1 & 37 & 11 & -41 & 42 & 61 & -57 & -10 & -50 & -79 \\ -3 & 15 & -23 & -21 & -14 & -5 & 13 & 3 & 10 & -32 & -8 \\ -2 & -1 & -4 & 2 & 10 & -4 & -10 & 8 & 0 & 9 & 11 \\ 6 & 11 & -6 & -18 & -14 & -14 & 10 & 4 & 2 & -17 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} -11 & -10 & -17 & 11 & 14 & 15 & -6 & 7 & 4 & 3 & 3 \\ 12 & 29 & 14 & -35 & -9 & -66 & -24 & 19 & -17 & 16 & 32 \\ 8 & 14 & 10 & -20 & 3 & -42 & -23 & 10 & -8 & 19 & 27 \\ 26 & 55 & 23 & -68 & -32 & -103 & -22 & 19 & -19 & 0 & 36 \\ -3 & -11 & 7 & 14 & -8 & 34 & 25 & -20 & 3 & -19 & -35 \\ -22 & -13 & -34 & 9 & 22 & 26 & -10 & 9 & 13 & -6 & -3 \\ 40 & 70 & 44 & -80 & -45 & -135 & -26 & 22 & -32 & 11 & 50 \\ 12 & 17 & 11 & -21 & -2 & -47 & -20 & 13 & -10 & 19 & 31 \\ -9 & -7 & -9 & 4 & 8 & 14 & -1 & -2 & 5 & -5 & -9 \\ 14 & 19 & 7 & -20 & -10 & -40 & -8 & 15 & -5 & 13 & 27 \end{pmatrix}$$

$rank(A_2 + \lambda B_2) = 9$, $9 < n = 11 \Rightarrow$ столбцы пучка $A_2 + \lambda B_2$ линейно зависимы. Поэтому в канонической форме пучка обязательно есть L_{ε_1}, $\varepsilon_1 > 0$. Для определения ε_1 строим следующие матрицы: $M_0[A_2 + \lambda B_2]$, $rank(M_0[A_2 + \lambda B_2]) = 11 : \ \rho_0 =$ $= 11 = (0+1)11 \ \Rightarrow \varepsilon_1 \neq 0$

$$M_1[A_2 + \lambda B_2] = \begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ B_2 & A_2 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}, \ rank(M_1[A_2 + \lambda B_2]) = 21 : \ \rho_1 = 21 < (1+1)11 \ \Rightarrow$$

$\varepsilon_1 = 1$

Элементарными преобразованиями, которые равносильны умножению пучка $A_2 + \lambda B_2$ справа и слева соответственно на невырожденные квадратные матрицы P_1 и Q_1:

$$P_1 = \begin{pmatrix} \frac{-7}{16} & \frac{5}{16} & \frac{1}{16} & \frac{-3}{16} & \frac{5}{16} & \frac{1}{4} & \frac{-3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{-3}{8} & \frac{3}{16} \\ \frac{21}{16} & \frac{-15}{16} & \frac{-3}{16} & \frac{9}{16} & \frac{1}{16} & \frac{-3}{4} & \frac{9}{8} & \frac{5}{8} & \frac{17}{8} & \frac{7}{16} \\ \frac{9}{8} & \frac{-11}{8} & \frac{1}{8} & \frac{5}{8} & \frac{-3}{8} & \frac{-1}{2} & \frac{5}{4} & \frac{1}{4} & \frac{9}{4} & \frac{3}{8} \\ \frac{-3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{-3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{-1}{8} \\ \frac{-13}{16} & \frac{7}{16} & \frac{-5}{16} & \frac{-1}{16} & \frac{7}{16} & \frac{3}{4} & \frac{-1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{-9}{8} & \frac{1}{16} \\ \frac{5}{16} & \frac{1}{16} & \frac{-3}{16} & \frac{-7}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{5}{8} & \frac{1}{8} & \frac{7}{16} \\ \frac{5}{8} & \frac{1}{8} & \frac{5}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{-3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{-1}{8} \\ \frac{-15}{8} & \frac{13}{8} & \frac{1}{8} & \frac{-3}{8} & \frac{-3}{8} & \frac{1}{2} & \frac{-7}{4} & \frac{-3}{4} & \frac{-11}{4} & \frac{-5}{8} \\ \frac{-11}{8} & \frac{9}{8} & \frac{-3}{8} & \frac{-7}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{-3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{-7}{4} & \frac{-1}{8} \\ \frac{-1}{8} & \frac{-5}{8} & \frac{-1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{-3}{8} \end{pmatrix}$$

$$Q_1 = \begin{pmatrix}
\frac{-40}{31} & \frac{102}{31} & \frac{185}{31} & \frac{-6}{31} & \frac{-96}{31} & \frac{64}{31} & \frac{-64}{31} & \frac{138}{31} & \frac{94}{31} & \frac{17}{31} & \frac{88}{31} \\
\frac{-13}{31} & \frac{44}{31} & \frac{95}{31} & \frac{-19}{31} & \frac{-56}{31} & \frac{27}{31} & \frac{-27}{31} & \frac{65}{31} & \frac{29}{31} & \frac{-3}{31} & \frac{41}{31} \\
\frac{25}{31} & \frac{-56}{31} & \frac{-104}{31} & \frac{-4}{31} & \frac{60}{31} & \frac{-40}{31} & \frac{40}{31} & \frac{-94}{31} & \frac{-51}{31} & \frac{1}{31} & \frac{-55}{31} \\
\frac{4}{31} & \frac{-35}{31} & \frac{-65}{31} & \frac{13}{31} & \frac{22}{31} & \frac{6}{31} & \frac{25}{31} & \frac{-51}{31} & \frac{-28}{31} & \frac{-11}{31} & \frac{-15}{31} \\
\frac{-1}{31} & \frac{32}{31} & \frac{55}{31} & \frac{-11}{31} & \frac{-21}{31} & \frac{14}{31} & \frac{-14}{31} & \frac{36}{31} & \frac{7}{31} & \frac{-5}{31} & \frac{27}{31} \\
\frac{-18}{31} & \frac{49}{31} & \frac{91}{31} & \frac{-12}{31} & \frac{-37}{31} & \frac{4}{31} & \frac{-35}{31} & \frac{59}{31} & \frac{33}{31} & \frac{3}{31} & \frac{21}{31} \\
\frac{17}{31} & \frac{-17}{31} & \frac{-36}{31} & \frac{1}{31} & \frac{16}{31} & \frac{-21}{31} & \frac{21}{31} & \frac{-23}{31} & \frac{-26}{31} & \frac{-8}{31} & \frac{-25}{31} \\
\frac{5}{31} & \frac{-5}{31} & \frac{-27}{31} & \frac{-7}{31} & \frac{12}{31} & \frac{-8}{31} & \frac{8}{31} & \frac{-25}{31} & \frac{-4}{31} & \frac{-6}{31} & \frac{-11}{31} \\
\frac{11}{31} & \frac{-11}{31} & \frac{-16}{31} & \frac{-3}{31} & \frac{14}{31} & \frac{1}{31} & \frac{-1}{31} & \frac{-24}{31} & \frac{-15}{31} & \frac{-7}{31} & \frac{-18}{31} \\
\frac{-6}{31} & \frac{37}{31} & \frac{82}{31} & \frac{-4}{31} & \frac{-33}{31} & \frac{22}{31} & \frac{-22}{31} & \frac{61}{31} & \frac{42}{31} & \frac{1}{31} & \frac{38}{31} \\
\frac{11}{31} & \frac{-42}{31} & \frac{-78}{31} & \frac{-3}{31} & \frac{45}{31} & \frac{-30}{31} & \frac{30}{31} & \frac{-55}{31} & \frac{-46}{31} & \frac{-7}{31} & \frac{-49}{31}
\end{pmatrix}$$

приводим пучок к виду $\{L_1, A_3 + \lambda B_3\}$, где $L_\varepsilon = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \end{pmatrix}$
Таким образом $A_2 + \lambda B_2 \sim P_1(A_2 + \lambda B_2)Q_1 =$

$$= \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 7\lambda & 7-12\lambda & -7-6\lambda & -9+3\lambda & -1+6\lambda & -3+9\lambda & 13\lambda & 7+12\lambda & -7+7\lambda \\
0 & 0 & 0 & -2+4\lambda & 4-8\lambda & -6-2\lambda & -5+6\lambda & -3+2\lambda & 7\lambda & -2+6\lambda & 3+4\lambda & -4+6\lambda \\
0 & 0 & 0 & 3-\lambda & -2-2\lambda & 2-3\lambda & -\lambda & 2-2\lambda & -1+2\lambda & 1 & \lambda & 2+\lambda \\
0 & 0 & 0 & 2+2\lambda & 2-6\lambda & -2-6\lambda & -5 & 1+2\lambda & -2+5\lambda & 2+6\lambda & 5+6\lambda & -2+2\lambda \\
0 & 0 & 0 & -8-4\lambda & -19+2\lambda & -4+10\lambda & 23+5\lambda & -1+\lambda & 21-3\lambda & -6\lambda & -14-13\lambda & 11 \\
0 & 0 & 0 & 1+4\lambda & 7-3\lambda & -1-2\lambda & -7-3\lambda & -2+2\lambda & -5+\lambda & -4+5\lambda & 2+7\lambda & -4+2\lambda \\
0 & 0 & 0 & 1+3\lambda & 2-8\lambda & -4-5\lambda & -5+2\lambda & -1+\lambda & -1+7\lambda & -1+6\lambda & 3+6\lambda & -2+5\lambda \\
0 & 0 & 0 & -2-2\lambda & -7+7\lambda & 1+5\lambda & 10-3\lambda & \lambda & 7-7\lambda & 2-4\lambda & -4-5\lambda & 5-5\lambda \\
0 & 0 & 0 & 3+\lambda & 8 & 2-3\lambda & -9-2\lambda & -1-3\lambda & -9+\lambda & -3+4\lambda & 3+4\lambda & -4+\lambda
\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow A_3 + \lambda B_3 =$

$$= \begin{pmatrix}
7\lambda & 7-12\lambda & -7-6\lambda & -9+3\lambda & -1+6\lambda & -3+9\lambda & 13\lambda & 7+12\lambda & -7+7\lambda \\
-2+4\lambda & 4-8\lambda & -6-2\lambda & -5+6\lambda & -3+2\lambda & 7\lambda & -2+6\lambda & 3+4\lambda & -4+6\lambda \\
3-\lambda & -2-2\lambda & 2-3\lambda & -\lambda & 2-2\lambda & -1+2\lambda & 1 & \lambda & 2+\lambda \\
2+2\lambda & 2-6\lambda & -2-6\lambda & -5 & 1+2\lambda & -2+5\lambda & 2+6\lambda & 5+6\lambda & -2+2\lambda \\
-8-4\lambda & -19+2\lambda & -4+10\lambda & 23+5\lambda & -1+\lambda & 21-3\lambda & -6\lambda & -14-13\lambda & 11 \\
1+4\lambda & 7-3\lambda & -1-2\lambda & -7-3\lambda & -2+2\lambda & -5+\lambda & -4+5\lambda & 2+7\lambda & -4+2\lambda \\
1+3\lambda & 2-8\lambda & -4-5\lambda & -5+2\lambda & -1+\lambda & -1+7\lambda & -1+6\lambda & 3+6\lambda & -2+5\lambda \\
-2-2\lambda & -7+7\lambda & 1+5\lambda & 10-3\lambda & \lambda & 7-7\lambda & 2-4\lambda & -4-5\lambda & 5-5\lambda \\
3+\lambda & 8 & 2-3\lambda & -9-2\lambda & -1-3\lambda & -9+\lambda & -3+4\lambda & 3+4\lambda & -4+\lambda
\end{pmatrix}$$

3. Рассматриваем пучок $A_3+\lambda B_3$, $rank(A_3+\lambda B_3)=8<9$, $\Rightarrow$ существует линейная зависимость между столбцами. Найдём L_{ε_2}, $\varepsilon_2\geq\varepsilon_1=1$. Для определеня ε_2 строим следующие матрицы:$M_1[A_3+\lambda B_3]=\begin{pmatrix} A_3 & 0\\ B_3 & A_3\\ 0 & B_3\end{pmatrix}$, $rank(M_1[A_3+\lambda B_3])=$ $=18=(1{+}1)9=18$ Строим $M_2[A_3{+}\lambda B_3]=\begin{pmatrix} A_3 & 0 & 0\\ B_3 & A_3 & 0\\ 0 & B_3 & A_3\\ 0 & 0 & B_3\end{pmatrix}$, $rank(M_2[A_3{+}\lambda B_3])=$ $=26<(2+1)9=27$, $\Rightarrow\varepsilon_2=2\Rightarrow L_{\varepsilon_2}=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\end{pmatrix}$

Элементарными преобразованиями, которые равносильны умножению пучка $A_3+\lambda B_3$ справа и слева соответственно на невырожденные квадратные матрицы P_2 и Q_2:

$$P_2=\begin{pmatrix}
1 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & -3 & 0 & 2\\
0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0\\
0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & -4 & 0 & 2\\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0\\
0 & \frac{-1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & \frac{-1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\
0 & \frac{-1}{2} & 0 & \frac{-3}{2} & -1 & 0 & 1 & -1 & -2\\
0 & \frac{-1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} & 0 & 0 & 0 & -1 & -1
\end{pmatrix}$$

$$Q_2 = \begin{pmatrix} \frac{-6}{7} & \frac{-1}{14} & \frac{-1}{14} & \frac{-2}{7} & \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{3}{14} & \frac{-2}{7} & \frac{-2}{7} \\ \frac{11}{7} & \frac{5}{7} & \frac{-2}{7} & \frac{13}{7} & \frac{1}{7} & \frac{-9}{7} & \frac{-8}{7} & \frac{6}{7} & \frac{-1}{7} \\ \frac{-17}{14} & \frac{-25}{28} & \frac{17}{28} & \frac{-4}{7} & \frac{-3}{7} & \frac{5}{14} & \frac{19}{28} & \frac{3}{7} & \frac{-4}{7} \\ \frac{1}{14} & \frac{13}{28} & \frac{-1}{28} & \frac{-1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{3}{14} & \frac{-11}{28} & \frac{-1}{7} & \frac{-1}{7} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 1 & 0 & -1 & \frac{-1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{-5}{7} & \frac{-9}{14} & \frac{5}{14} & \frac{3}{7} & \frac{-3}{7} & \frac{-1}{7} & \frac{-1}{14} & \frac{3}{7} & \frac{-4}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{2}{7} & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} & \frac{-1}{7} & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{-5}{14} & \frac{-9}{28} & \frac{5}{28} & \frac{-2}{7} & \frac{2}{7} & \frac{-1}{14} & \frac{-1}{28} & \frac{-2}{7} & \frac{-2}{7} \\ \frac{5}{2} & \frac{3}{4} & \frac{-3}{4} & 2 & 0 & \frac{-3}{2} & \frac{-5}{4} & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$A_3 + \lambda B_3 \sim P_2(A_3 + \lambda B_3)Q_2 =$

$$= \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & -\lambda & 0 & -1-\lambda & 2\lambda & 1-2\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -1 & 2+2\lambda & 1-\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2-\lambda & -2+\lambda & 2-2\lambda & 2\lambda & 1-\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 1-2\lambda & \lambda & 3+3\lambda & -2+2\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3+3\lambda & -1-\lambda & \lambda & -1-3\lambda & 1+\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5+\lambda & -3+\lambda & 3-\lambda & -3-3\lambda & 2-\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3-2\lambda & 1 & 0 & 1+2\lambda & -1 \end{pmatrix}$$

3. Рассмотрим пучок $A_4 + \lambda B_4 =$

$$= \begin{pmatrix} \lambda & -\lambda & 0 & -1-\lambda & 2\lambda & 1-2\lambda \\ 1 & 1 & -2 & -1 & 2+2\lambda & 1-\lambda \\ 0 & 2-\lambda & -2+\lambda & 2-2\lambda & 2\lambda & 1-\lambda \\ 0 & -3 & 1-2\lambda & \lambda & 3+3\lambda & -2+2\lambda \\ 0 & 3+3\lambda & -1-\lambda & \lambda & -1-3\lambda & 1+\lambda \\ 0 & 5+\lambda & -3+\lambda & 3-\lambda & -3-3\lambda & 2-\lambda \\ 0 & -3-2\lambda & 1 & 0 & 1+2\lambda & -1 \end{pmatrix}$$

$$ran\lambda(A_4 + \lambda B_4) = 6, \ \Rightarrow$$

существует линейная зависимость между строками и в канонической форме пучка присутствует L_{η_1}. Найдём L_{η_1} рассматривая матрицы $M_0[A_4^T + \lambda B_4^T] = \begin{pmatrix} A_4^T \\ B_4^T \end{pmatrix}$, $ran\lambda(M_0[A_4^T + \lambda B_4^T]) = 7 = (0+1)7 = 7$

$$M_1[A_4^T+\lambda B_4^T]=\begin{pmatrix} A_4^T & 0 \\ A_4^T & B_4^T \\ & A_4^T \end{pmatrix},\ ran\lambda(M_0[A_4^T+\lambda B_4^T])=14=(1+1)7=14$$

$$M_2[A_4^T+\lambda B_4^T]=\begin{pmatrix} A_4^T & 0 & 0 \\ B_4^T & A_4^T & 0 \\ 0 & B_4^T & A_4^T \\ 0 & 0 & B_4^T \end{pmatrix},\ rank(M_2[A_4^T+\lambda B_4^T])=14<(2+1)7=21,\Rightarrow$$

$\eta_1=2$ таким образом $L_{\eta_1}=\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Элементарными преобразованиями, которые равносильны умножению пучка $A_4+\lambda B_4$ справа и слева соответственно на невырожденные квадратные матрицы P_3 и Q_3:

$$P_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{-5}{2} & \frac{3}{2} & \frac{-7}{2} & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-3}{2} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Q_3=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$A_4+\lambda B_4\sim P_3(A_4+\lambda B_4)Q_3=$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+2\lambda & -1 & 2-\lambda & 2+2\lambda \\ 0 & 0 & -1-\lambda & -1-\lambda & 1 & -1-2\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & -\lambda \end{pmatrix}$$

4. Рассмотрим пучок $A_5+\lambda B_5 = \begin{pmatrix} 1+2\lambda & -1 & 2-\lambda & 2+2\lambda \\ -1-\lambda & -1-\lambda & 1 & -1-2\lambda \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda & -\lambda \end{pmatrix}$ Это регулярный пучок, причём $det(B) \neq 0$, следовательно, бесконечные элементарные делители отсутствуют. Приведём его к нормальной форме Жордана:

$$A_5+\lambda B_5 = \begin{pmatrix} 1+2\lambda & -1 & 2-\lambda & 2+2\lambda \\ -1-\lambda & -1-\lambda & 1 & -1-2\lambda \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda & -\lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\lambda & 1+\lambda \\ 0 & 0 & 2+\lambda & \lambda \end{pmatrix} = P_4(A_5+\lambda B_5)Q_4,$$

где $P_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $Q_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$P_4(A_5+\lambda B_5)Q_4 \sim \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda+1 \end{pmatrix} = P_5(P_4(A_5+\lambda B_5)Q_4)Q_5, \text{ где}$$

$$P_5 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ Q_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Таким образом, используя элементарные линейные преобразования мы привелии исходный пучок $A+\lambda B$ к каноническому квазидиагональному виду:

$$A+\lambda B \sim P(A+\lambda B)Q =$$

$$= \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&\lambda&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&\lambda&1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&\lambda&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&\lambda&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1+\lambda&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1+\lambda \end{pmatrix}$$

где матрицы P и Q имеют вид:

$$P = \begin{pmatrix}
1 & \frac{-37}{32} & \frac{143}{32} & \frac{67}{32} & \frac{-41}{32} & \frac{-129}{32} & \frac{-33}{8} & \frac{-89}{16} & \frac{-117}{16} & \frac{-39}{32} & \frac{-57}{16} \\
0 & \frac{-7}{16} & \frac{5}{16} & \frac{1}{16} & \frac{-3}{16} & \frac{5}{16} & \frac{1}{4} & \frac{-3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{3}{16} & \frac{-3}{8} \\
0 & \frac{191}{32} & \frac{-221}{32} & \frac{-57}{32} & \frac{75}{32} & \frac{83}{32} & \frac{3}{8} & \frac{139}{16} & \frac{95}{16} & \frac{69}{32} & \frac{187}{16} \\
0 & \frac{65}{32} & \frac{-67}{32} & \frac{-7}{32} & \frac{21}{32} & \frac{13}{32} & \frac{-3}{8} & \frac{37}{16} & \frac{17}{16} & \frac{27}{32} & \frac{53}{16} \\
0 & \frac{-75}{32} & \frac{129}{32} & \frac{45}{32} & \frac{-39}{32} & \frac{-79}{32} & \frac{-15}{8} & \frac{-87}{16} & \frac{-75}{16} & \frac{-41}{32} & \frac{-87}{16} \\
0 & \frac{57}{16} & \frac{-19}{16} & \frac{17}{16} & \frac{13}{16} & \frac{-27}{16} & \frac{-13}{4} & \frac{9}{8} & \frac{-23}{8} & \frac{11}{16} & \frac{37}{8} \\
0 & \frac{-11}{16} & \frac{33}{16} & \frac{13}{16} & \frac{-7}{16} & \frac{-31}{16} & \frac{-7}{4} & \frac{-23}{8} & \frac{-27}{8} & \frac{-9}{16} & \frac{-15}{8} \\
0 & \frac{151}{32} & \frac{-181}{32} & \frac{-33}{32} & \frac{67}{32} & \frac{75}{32} & \frac{7}{8} & \frac{107}{16} & \frac{71}{16} & \frac{61}{32} & \frac{131}{16} \\
0 & \frac{-21}{8} & \frac{23}{8} & \frac{3}{8} & \frac{-9}{8} & \frac{-1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{-13}{4} & \frac{-5}{4} & \frac{-7}{8} & \frac{-21}{4} \\
0 & \frac{25}{16} & \frac{-51}{16} & \frac{-15}{16} & \frac{13}{16} & \frac{37}{16} & \frac{7}{4} & \frac{33}{8} & \frac{33}{8} & \frac{11}{16} & \frac{29}{8} \\
0 & \frac{7}{32} & \frac{-101}{32} & \frac{-49}{32} & \frac{19}{32} & \frac{91}{32} & \frac{23}{8} & \frac{75}{16} & \frac{87}{16} & \frac{13}{32} & \frac{51}{16}
\end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & \frac{-40}{31} & \frac{102}{31} & \frac{185}{31} & \frac{-6}{31} & \frac{-96}{31} & \frac{64}{31} & \frac{-64}{31} & \frac{138}{31} & \frac{94}{31} & \frac{-71}{62} & \frac{105}{62} \\
0 & \frac{-13}{31} & \frac{44}{31} & \frac{95}{31} & \frac{-19}{31} & \frac{-56}{31} & \frac{27}{31} & \frac{-27}{31} & \frac{65}{31} & \frac{29}{31} & \frac{-22}{31} & \frac{19}{31} \\
0 & \frac{-60}{217} & \frac{184}{217} & \frac{262}{217} & \frac{75}{434} & \frac{-443}{434} & \frac{347}{434} & \frac{-127}{217} & \frac{569}{434} & \frac{172}{217} & \frac{-461}{868} & \frac{45}{124} \\
0 & \frac{-100}{217} & \frac{162}{217} & \frac{509}{217} & \frac{-46}{217} & \frac{-116}{217} & \frac{-181}{217} & \frac{-67}{217} & \frac{221}{217} & \frac{142}{217} & \frac{43}{217} & \frac{11}{31} \\
0 & \frac{-218}{217} & \frac{900}{217} & \frac{3365}{434} & \frac{-323}{868} & \frac{-3277}{868} & \frac{2319}{868} & \frac{-1299}{434} & \frac{5321}{868} & \frac{813}{217} & \frac{-3321}{1736} & \frac{513}{248} \\
0 & \frac{1084}{217} & \frac{-3006}{217} & \frac{-12693}{434} & \frac{2281}{868} & \frac{9743}{868} & \frac{-2889}{868} & \frac{4343}{434} & \frac{-16379}{868} & \frac{-2659}{217} & \frac{6227}{1736} & \frac{-1595}{248} \\
0 & \frac{323}{217} & \frac{-1005}{217} & \frac{-1924}{217} & \frac{193}{434} & \frac{1817}{434} & \frac{-953}{434} & \frac{709}{217} & \frac{-2951}{434} & \frac{-897}{217} & \frac{1545}{868} & \frac{-281}{124} \\
0 & \frac{189}{31} & \frac{-561}{31} & \frac{-2221}{62} & \frac{349}{124} & \frac{1895}{124} & \frac{-881}{124} & \frac{797}{62} & \frac{-3067}{124} & \frac{-486}{31} & \frac{1531}{248} & \frac{-2093}{248} \\
-1 & \frac{-249}{217} & \frac{373}{217} & \frac{2869}{434} & \frac{-1005}{868} & \frac{-487}{868} & \frac{-2827}{868} & \frac{-555}{434} & \frac{1663}{868} & \frac{410}{217} & \frac{2445}{1736} & \frac{203}{248} \\
0 & \frac{814}{217} & \frac{-2395}{217} & \frac{-9467}{434} & \frac{1437}{868} & \frac{8143}{868} & \frac{-3889}{868} & \frac{3417}{434} & \frac{-13211}{868} & \frac{-2102}{217} & \frac{6635}{1736} & \frac{-1283}{248} \\
0 & \frac{-1065}{217} & \frac{3266}{217} & \frac{12773}{434} & \frac{-2003}{868} & \frac{-11061}{868} & \frac{5483}{868} & \frac{-4617}{434} & \frac{17921}{868} & \frac{2836}{217} & \frac{-9313}{1736} & \frac{1737}{248}
\end{pmatrix}$$

Перейдём собственно к решению системы $Ax + B\frac{dx}{dt} = f(t)$.
Введём новые неизвестные функции $z_1, z_2, \ldots, z_{12}$, связанные со старыми преобразованием $x = Qz$. Тогда $\widetilde{f} = Pf = (\widetilde{f}_1, \widetilde{f}_2, \ldots, \widetilde{f}_{11}) =$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 1 \\ t^2 \\ e^t \\ 1 \\ -e^t \\ t \\ -2t \\ -e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}$$

Таким образоммы получили следующую систему $\widetilde{A}z + \widetilde{B}\frac{dz}{dt} = \widetilde{f}(t)$, где
$\widetilde{A} + \lambda\widetilde{B} = \{0, L_1, L_2, L_2^T, I + \lambda E\}$

В соответствии с диагональными блоками система распадается на следующие:

1-й блок:

$$0 \cdot z_1 = \widetilde{f}_1(t) = 0 \;\Rightarrow\; \forall z_1$$

Пусть $z_1 = t + 1$

2-й блок:

$$\frac{dz_2}{dt} + z_3 = \widetilde{f}_2(t) = t$$

Переменная z_3 также свободная. Пусть $z_3 = t \;\Rightarrow\; \frac{dz_2}{dt} = 0 \Rightarrow z_2 = c_2$

3-й блок:

$$\begin{cases} \frac{dz_4}{dt} + z_5 = \widetilde{f}_3 = 1; \\ \frac{dz_5}{dt} + z_6 = \widetilde{f}_4 = t^2. \end{cases}$$

Пусть $z_6 = t^2 \Rightarrow z_5 = c_5 \Rightarrow z_4 = tc_5 + c_6$

4-й блок:

$$\begin{cases} \frac{dz_7}{dt} = \widetilde{f}_5 = e^t; \\ \frac{dz_8}{dt} + z_7 = \widetilde{f}_6 = 1; \\ z_8 = \widetilde{f}_7 = -e^t. \end{cases}$$

Проверим условия совместимости:

$$\widetilde{f}_5 - \frac{d\widetilde{f}_6}{dt} + \frac{d^2\widetilde{f}_7}{dt^2} = e^t - 0 - e^t = 0, \;\Rightarrow$$

система совместна.

Решая эту систему получим:

$$z_7 = e^t;\ z_8 = -e^t$$

5-й блок:

$$\begin{cases} \frac{dz_9}{dt} + z_{10} = \widetilde{f}_8 = 1; \\ \frac{dz_{10}}{dt} = \widetilde{f}_9 = -2t. \end{cases}$$

$$\Rightarrow z_{10} = -t^2 + c_{10},\ z_9 = -\frac{t^2}{3} + (c_{10}+1)t + c_9$$

6-й блок:

$$\begin{cases} \frac{dz_9}{dt} + z_{10} = \widetilde{f}_8 = -e^{-t}; \\ \frac{dz_{10}}{dt} = \widetilde{f}_9 = e^{-t}. \end{cases}$$

Решив эту систему получаем следующий результат:

$$z_{12} = (c_{12}+t)e^{-t},\ z_{11} = c_{11}e^{-t} - (c_{12}t + t + \frac{t^2}{2})e^{-t}$$

Таким образом, мы получили решение:

$$\begin{cases} z_1 = t+1; \\ z_2 = c_2; \\ z_3 = t; \\ z_4 = tc_5 + c_6; \\ z_5 = c_5; \\ z_6 = t^2; \\ z_7 = e^t; \\ z_8 = -e^t; \\ z_9 = -\frac{t^2}{3} + (c_{10}+1)t + c_9; \\ z_{10} = -t^2 + c_{10}; \\ z_{11} = c_{11}e^{-t} - (c_{12}t + t + \frac{t^2}{2})e^{-t}; \\ z_{12} = (c_{12}+t)e^{-t}. \end{cases}$$

Перейдём обратно к координатам x: $x = Qz$

$$x_1 = [t+1]$$

$$x_2 = \left[\frac{133\,t}{31} + \frac{185\,t\,c5}{31} - \frac{190\,t^2}{31} + \frac{128}{31}\,e^t - \frac{46\,t^3}{31} + \frac{138\,(c10+1)\,t}{31} - \frac{71}{62}\,c11\,e^{(-t)} + \frac{71}{62}\,\%1 + \frac{105}{62}\,(c12+t)\,e^{(-t)}\right]$$

$$x_3 = \left[-\frac{13\,c2}{31} + \frac{44\,t}{31} + \frac{95\,t\,c5}{31} + \frac{95\,c6}{31} - \frac{19\,c5}{31} - \frac{85\,t^2}{31} + \frac{54}{31}\,e^t - \frac{65\,t^3}{93} + \frac{65\,(c10+1)\,t}{31} + \frac{65\,c9}{31} + \frac{29\,c10}{31} - \frac{22}{31}\,c11\,e^{(-t)} + \frac{22}{31}\,\%1 + \frac{19}{31}\,(c12+t)\,e^{(-t)}\right]$$

$$x_4 = \left[\frac{184\,t}{217} + \frac{262\,t\,c5}{217} - \frac{787\,t^2}{434} + \frac{601}{434}\,e^t - \frac{569\,t^3}{1302} + \frac{569\,(c10+1)\,t}{434} - \frac{461}{868}\,c11\,e^{(-t)} + \frac{461}{868}\,\%1 + \frac{45}{124}\,(c12+t)\,e^{(-t)}\right]$$

$$x_5 = \left[\frac{162\,t}{217} + \frac{509\,t\,c5}{217} - \frac{258\,t^2}{217} - \frac{114}{217}\,e^t - \frac{221\,t^3}{651} + \frac{221\,(c10+1)\,t}{217} + \frac{43}{217}\,c11\,e^{(-t)} - \frac{43}{217}\,\%1 + \frac{11}{31}\,(c12+t)\,e^{(-t)}\right]$$

$$x_6 = \left[\frac{900\,t}{217} + \frac{3365\,t\,c5}{434} - \frac{6529\,t^2}{868} + \frac{4917}{868}\,e^t - \frac{5321\,t^3}{2604} + \frac{5321\,(c10+1)\,t}{868} - \frac{3321}{1736}\,c11\,e^{(-t)} + \frac{3321}{1736}\,\%1 + \frac{513}{248}\,(c12+t)\,e^{(-t)}\right]$$

$$x_7 = \left[-\frac{3006\,t}{217} - \frac{12693\,t\,c5}{434} + \frac{20379\,t^2}{868} - \frac{11575}{868}\,e^t + \frac{16379\,t^3}{2604} - \frac{16379\,(c10+1)\,t}{868} + \frac{6227}{1736}\,c11\,e^{(-t)} - \frac{6227}{1736}\,\%1 - \frac{1595}{248}\,(c12+t)\,e^{(-t)}\right]$$

$$x_8 = \left[-\frac{1005\,t}{217} - \frac{1924\,t\,c5}{217} + \frac{3611\,t^2}{434} - \frac{2371}{434}\,e^t + \frac{2951\,t^3}{1302} - \frac{2951\,(c10+1)\,t}{434} + \frac{1545}{868}\,c11\,e^{(-t)} - \frac{1545}{868}\,\%1 - \frac{281}{124}\,(c12+t)\,e^{(-t)}\right]$$

$$x_9 = \left[-\frac{561\,t}{31} - \frac{2221\,t\,c5}{62} + \frac{3839\,t^2}{124} - \frac{2475}{124}\,e^t + \frac{3067\,t^3}{372} - \frac{3067\,(c10+1)\,t}{124} + \frac{1531}{248}\,c11\,e^{(-t)} - \frac{1531}{248}\,\%1 - \frac{2093}{248}\,(c12+t)\,e^{(-t)}\right]$$

$$x_{10} = \left[\frac{156\,t}{217} + \frac{2869\,t\,c5}{434} + \frac{2869\,c6}{434} - \frac{2127\,t^2}{868} - \frac{1717}{868}\,e^t - \frac{1663\,t^3}{2604} + \frac{1663\,(c10+1)\,t}{868} + \frac{2445}{1736}\,c11\,e^{(-t)} - \frac{2445}{1736}\,\%1 + \frac{203}{248}\,(c12+t)\,e^{(-t)}\right]$$

$$x_{11} = \left[-\frac{2395\,t}{217} - \frac{9467\,t\,c5}{434} + \frac{16551\,t^2}{868} - \frac{10723}{868}\,e^t + \frac{13211\,t^3}{2604} - \frac{13211\,(c10+1)\,t}{868} + \frac{6635}{1736}\,c11\,e^{(-t)} - \frac{6635}{1736}\,\%1 - \frac{1283}{248}\,(c12+t)\,e^{(-t)}\right]$$

$$x_{12} = \left[\frac{3266\,t}{217} + \frac{12773\,t\,c5}{434} - \frac{22405\,t^2}{868} + \frac{14717}{868}\,e^t - \frac{17921\,t^3}{2604} + \frac{17921\,(c10+1)\,t}{868} - \frac{9313}{1736}\,c11\,e^{(-t)} + \frac{9313}{1736}\,\%1 + \frac{1737}{248}\,(c12+t)\,e^{(-t)}\right]$$