

**Государственный комитет Российской Федерации
по высшему образованию
Балтийский государственный технический университет**

Кафедра радиоэлектронных систем управления

**Методы статистического моделирования в радиотехнике
Учебное пособие**

**Санкт-Петербург
2003**

Содержание	стр.
Введение	3
1. Моделирование случайных величин с заданным законом распределения	4
1.1 Метод нелинейного преобразования, обратной функции распределения	4
1.2 Метод Неймана	4
1.3 Метод кусочной аппроксимации	5
1.4 Типовые алгоритмы моделирования случайных величин с наиболее распространенными законами распределения	7
1.4.1 Равномерный закон распределения	7
1.4.2 Нормальный закон распределения	8
1.4.3 Закон распределения Релея	10
1.4.4 Обобщенный закон распределения Релея (закон Релея-Райса)	10
1.4.5 Экспоненциальный (показательный) закон распределения	11
1.4.6 Логарифмически-нормальный закон распределения	12
2. Моделирование случайных векторов	13
2.1 Метод условных распределений	13
2.2 Многомерный метод Неймана	13
2.3 Метод линейного преобразования	14
3. Моделирование случайных процессов	16
3.1 Моделирование нормальных случайных процессов	16
3.1.1 Метод скользящего суммирования	17
3.1.2 Метод рекуррентных разностных уравнений	19
3.2 Типовые алгоритмы моделирования нормальных случайных процессов с часто встречающимися корреляционными функциями	19
3.2.1 Случайный процесс с экспоненциальной корреляционной функцией	19
3.2.2 Случайный процесс с экспоненциально-косинусной корреляционной функцией	20
3.2.3 Случайный процесс с корреляционной функцией вида	21
3.2.4 Случайный процесс с прямоугольным спектром и корреляционной функцией $\sin(x)/x$	21
3.2.5 Случайный процесс с экспоненциальным спектром и корреляционной функцией вида	22
3.2.6 Случайный процесс с треугольной корреляционной функцией	23
3.3 Моделирование случайных процессов с распределениями плотности вероятности отличными от нормальных	25
3.4 Типовые алгоритмы моделирования стационарных случайных процессов с распространенными одномерными законами распределения плотности вероятности	26
3.4.1 Случайный процесс с равномерным распределением	26
3.4.2 Случайный процесс с распределением Релея	27
3.4.3 Случайный процесс с экспоненциальным распределением	28
3.4.4 Случайный процесс с логарифмически-нормальным распределением	29
3.5 Моделирование многомерных нормальных случайных процессов	29
3.6 Моделирование нестационарных случайных процессов	32
3.6.1 Моделирование нестационарности по математическому ожиданию	32
3.6.2 Моделирование нестационарности по дисперсии	32
3.7 Моделирование нестационарности по корреляционной функции (спектральной плотности) или одномерной плотности	33
3.7.1 Процессы со сложными видами нестационарности	33
4. Моделирование случайных потоков	34
5. Моделирование случайных полей	35

Введение

Математическими моделями радиосигналов, радиопомех и различных комбинаций сигналов и помех являются, в общем случае, случайные функции времени (случайные процессы), которые можно представить в следующем общем виде:

$$S(t) = F_t[f_1(t, x_1, x_2, \dots), f_2(t, x_1, x_2, \dots), \dots, v_1(t, y_1, y_2, \dots), v_2(t, y_1, y_2, \dots), \dots, \xi_1(t), \xi_2(t), \dots] \quad (1)$$

где t - непрерывное или дискретное время;

$f_1(t, x_1, x_2, \dots), f_2(t, x_1, x_2, \dots), \dots$ - детерминированные функции с детерминированными параметрами;

$v_1(t, x_1, x_2, \dots), v_2(t, x_1, x_2, \dots), \dots$ - функции со случайными параметрами;

$\xi_1(t), \xi_2(t), \dots$ - случайные процессы (шумы) с заданными свойствами;

F_t - символ некоторого преобразования, зависящего в общем случае от времени.

Реализации (выборочные функции) случайного процесса являются детерминированными функциями.

$$S^k(t) = F_t[f_1(t, x_1, x_2, \dots), \dots, v_1(t, y_1^k, y_2^k, \dots), \dots, \xi_1^k(t), \xi_2^k(t), \dots] \quad (2)$$

где $y_1^k, y_2^k, \dots, \xi_1^k(t), \xi_2^k(t), \dots$ - реализации соответствующих случайных величин и случайных процессов (k - номер реализации).

Функции со случайными параметрами являются разновидностями случайных процессов, отличающихся способом их задания. Их иногда называют **параметрически заданными** случайными процессами, в отличие от $\xi_1^k(t), \xi_2^k(t), \dots$ - задаваемых другими способами, например, с помощью многомерных плотностей распределения вероятностей, и называемых просто случайными процессами.

Параметры $y_1(t), y_2(t), \dots$ - могут быть как непрерывными, так и дискретными случайными величинами. Обычно предполагается, что известны их плотности распределения вероятностей $\omega(y_1, y_2, \dots)$.

Преобразование F_t включает в себя различные операции, осуществляемые, например, при модуляции сигналов или при взаимодействии сигналов и помех (суммирование в случае аддитивной смеси).

Практически любое колебание, наблюдаемое в некоторой точке радиотракта, может быть представлено в форме (1).

Целью моделирования радиосигналов и радиопомех является воспроизведение на ПК случайных процессов вида (1), математически описывающих радиосигналы и радиопомехи.

1. Моделирование случайных величин с заданным законом распределения

1.1 Метод нелинейного преобразования, обратного функции распределения

Пусть $W(y) = \int_{-\infty}^y w(z) d(z)$ - функция распределения вероятностей случайной величины y , а $W^{-1}(x)$ - функция обратная $W(y)$. Тогда случайная величина $y = W^{-1}(x)$ имеет заданный закон распределения $W(y)$, если случайная величина x равномерно распределена от 0 до 1.

Пример 1.1

Пусть требуется получить алгоритм формирования случайной величины, имеющей закон распределения Релея:

$$W(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ \frac{y}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right), & y \geq 0 \end{cases}$$

$$W(y) = \int_{-\infty}^y w(z) d(z) = \int_{-\infty}^y \frac{z}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right) dz = -\exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right) \Big|_0^y = 1 - \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right)$$

Для получения обратной функции $W^{-1}(x)$ приравняем $x = W(y)$ и выразим из полученного уравнения величину y :

$$x = W(y) = 1 - \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$\exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right) = 1 - x$$

$$-\frac{y^2}{2\sigma^2} = \ln(1 - x)$$

$$y = \sqrt{-2\sigma^2 \ln(1 - x)}$$

Так как случайная величина x должна быть распределена равномерно от 0 до 1, то и случайная величина $(1-x)$ будет распределена так же, поэтому окончательно можно записать:

$$y = \sigma \cdot \sqrt{-2 \cdot \ln(x)}$$

К сожалению, не всегда существуют элементарные преобразования для получения случайных величин с заданным законом распределения из равномерно распределенных случайных чисел.

1.2 Метод Неймана

Метод используется для моделирования случайных величин, возможные значения которых не выходят за пределы некоторого ограниченного интервала (случайные величины с усеченными законами

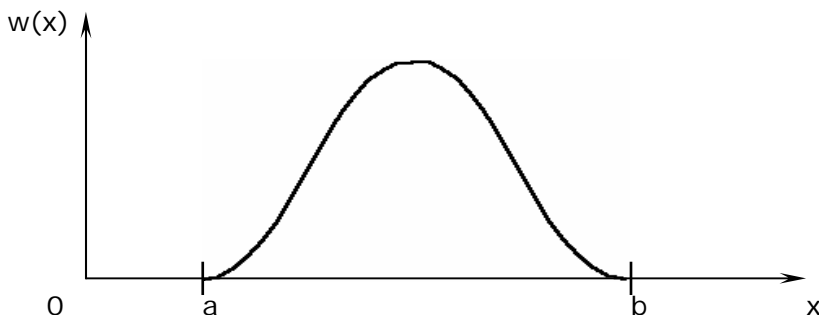


Рис. 1.2.1. Усеченный закон распределения.

распределения), а также случайных величин, законы распределения которых можно аппроксимировать усеченными (рис 1.2.1).

Суть метода заключается в выполнении последовательности действий:

из датчика равномерно распределенных случайных величин независимо выбираются

пары чисел x_1^n и x_2^n , из них формируются другие случайные числа по следующим правилам:

$$x_1^{n*} = a + (b - a)x_1^n \quad (1.2.1)$$

$$x_2^{n*} = w_m x_2^n \quad (1.2.2)$$

где a , b - границы интервала определения случайной величины, w_m - максимальное значение $W(y)$ на интервале определения случайной величины (см. рис.1.2.1) в качестве реализации случайной величины берется число x_1^{n*} из тех пар чисел, для которых выполняется условие:

$$x_2^{n*} \leq w(x_1^{n*}) \quad (1.2.3)$$

Пары, не удовлетворяющие этому неравенству, выбрасываются, и на шаге n происходит возврат к первому пункту последовательности действий (новая выборка пары чисел x_1^n и x_2^n).

Пары случайных чисел x_1^{n*} и x_2^{n*} можно рассматривать как координаты случайных точек на плоскости, равномерно распределенных вдоль осей y и $W(y)$ внутри прямоугольника $abcd$ (рис.1.2.2).

Пары, удовлетворяющие неравенству - это координаты точек плоскости, равномерно распределенных вдоль осей внутри той части $abcd$, которая расположена под кривой.

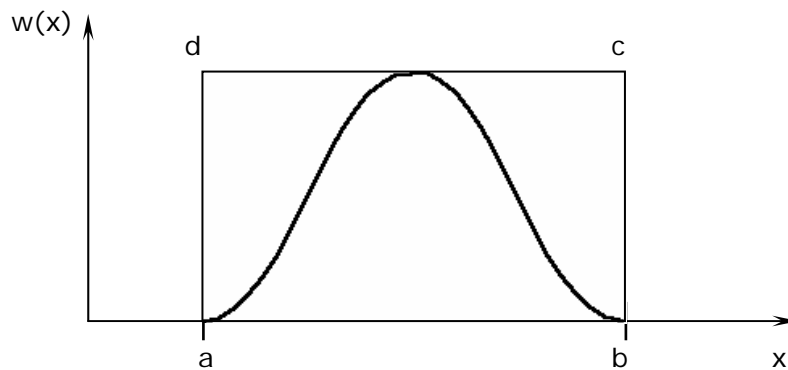


Рис. 1.2.2. К методу Неймана.

Пример 1.2.1

Пусть требуется получить алгоритм формирования случайной величины, имеющей следующий закон распределения (β -распределение):

$$W(y) = \begin{cases} 0, & y < 0, y > 1 \\ c \cdot x^{a-1} \cdot (1-x)^{b-1}, & 0 < y < 1 \end{cases}$$

Из датчика равномерно распределенных от 0 до 1 случайных величин независимо выбираем два числа x_1^n и x_2^n и производим их преобразование:

$$x_1^{n*} = x_2^{n*} \quad (\text{так как } a = 0, b = 1)$$

$x_2^{n*} = w_m x_2^n$ (максимальное значение w_m необходимо заранее определить или аналитически, или численными методами).

Далее проверяем условие:

$$x_2^{n*} \leq c \cdot (x_1^{n*})^{a-1} \cdot (1 - x_1^{n*})^{b-1}$$

Если оно выполняется, то в качестве реализации случайной величины с заданным законом распределения на шаге n принимаем значение x_1^{n*} , если нет, то остаемся на шаге n и повторяем все с начала.

1.3 Метод кусочной аппроксимации

Пусть требуется получить случайную величину y с функцией плотности $W(y)$. Предположим, что область возможных значений величин y ограничена интервалом (a, b) , т.е. неограниченное распределение заменим ограниченным (усеченным).

Разобьем интервал (a, b) на n достаточно малых интервалов (a_m, a_{m+1}) , где $m = 0, \dots, n-1$; $a_0 = a, a_n = b$; таким образом, чтобы распределение заданной случайной величины можно было аппроксимировать каким-нибудь более простым распределением, например, равномерным (рис. 1.3.1).

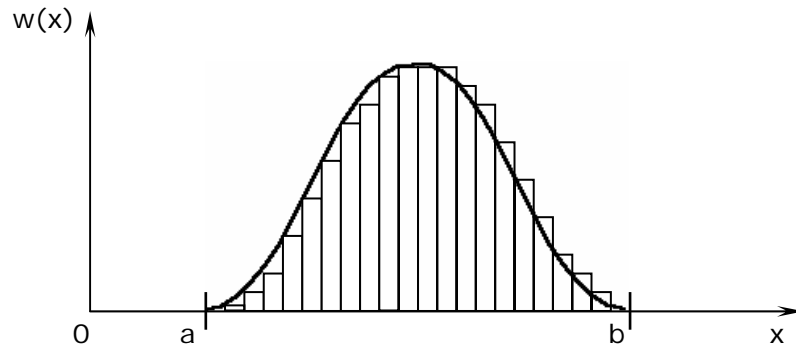


Рис. 1.3.1 Разбиение отрезка (a, b) на n интервалов

Пусть P_m - вероятность попадания случайной величины y в каждый из интервалов. Тогда получать реализации y с кусочно-равномерным распределением можно в соответствии со следующей схемой:

- 1) случайным образом с вероятностью P_m выбирается интервал (a_m, a_{m+1}) ;
- 2) формируется реализация случайной величины Δy_m^k равномерно распределенной в интервале $(0, a_{m+1} - a_m)$;
- 3) искомая реализация y получается в виде $y = a_m + \Delta y_m^k$

Случайный выбор интервала (a_m, a_{m+1}) с вероятностью P_m означает, по существу, моделирование дискретной случайной величины, принимающей n значений $a_m, m = 0, \dots, n-1$ с вероятностью P_m (рис. 1.3.2).

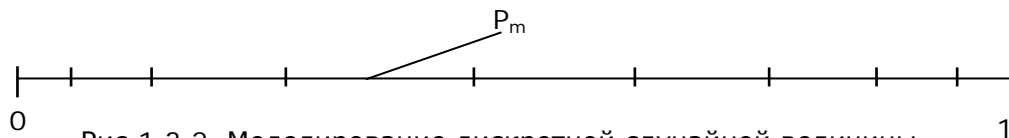


Рис. 1.3.2. Моделирование дискретной случайной величины, принимающей n значений.

Моделирование такой дискретной случайной величины проводится следующим образом. Отрезок прямой от 0 до 1 разбивается на n интервалов длиной $P_m = x_{n+1} - x_n$ каждый. На шаге n берем реализацию случайной величины x_n равномерно распределенной от 0 до 1 , и сравниваем ее с порогами $P_1, (P_1 + P_2), (P_1 + P_2 + P_3), \dots$. Если x_n не превысила порог P_1 , то реализация искомой случайной величины y_n будет находиться в первом интервале. Если x_n превысила порог P_1 , но не превысила порог $(P_1 + P_2)$, то - во втором и так далее.

Пример 1.3.1

Пусть требуется получить алгоритм формирования случайной величины, имеющей следующий закон распределения (нормальное распределение с выбросами на концах):

$$W(y) = \begin{cases} 0, & |y| > b + a \\ \frac{\varepsilon}{2a}, & b < |y| < b + a \\ \frac{1 - \varepsilon}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right) & |y| < b \end{cases}$$

Разобьем интервал определения случайной величины $(-b-a, +b+a)$ на 3 интервала: $(-b-a, -b)$, $(-b, +b)$, $(+b, +b+a)$. Вероятности попадания случайной величины y в крайние интервалы будут одинаковы и равны:

$$P_1 = P_3 = \frac{\varepsilon}{2a} \cdot a = \frac{\varepsilon}{2}$$

Вероятность попадания в центральный интервал будет равна:

$$P_2 = 1 - P_1 - P_3 = 1 - \varepsilon$$

На шаге n берем реализацию случайной величины x_n равномерно распределенной от 0 до 1 и сравниваем ее с порогами P_1 и $(P_1 + P_2)$. Если x_n не превысила порог P_1 , то реализация искомой случайной величины на шаге n y_n будет находиться в первом интервале. Если x_n превысила порог P_1 и не превысила порог $(P_1 + P_2)$, то y_n будет находиться во втором интервале. Если x_n превысила оба порога, то y_n будет находиться в третьем интервале.

Моделирование случайной величины y_n в первом и третьем интервалах производится с помощью алгоритмов формирования случайных величин с равномерным законом распределения, во втором - с помощью алгоритмов формирования случайных величин с нормальным законом распределения:

$$\begin{aligned} y_n^1 &= (-b-a) + a \cdot z_n \\ y_n^2 &= \sigma \sqrt{-2 \cdot \ln(z_n)} \cdot \sin(2\pi \cdot z_n^2) \\ y_n^3 &= b + a \cdot z_n \end{aligned}$$

где z_n - случайная величина с равномерным от 0 до 1 законом распределения

1.4 Типовые алгоритмы моделирования случайных величин с наиболее распространенными законами распределения

Для всех законов распределения приводятся их аналитические выражения $W(x)$, статистические характеристики (математические ожидания M_x и дисперсии σ_x^2) и алгоритмы формирования случайных величин.

1.4.1 Равномерный закон распределения

$$W(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & x > b \end{cases} \quad (1.4.1.1)$$

$$M_x = \frac{a+b}{2}; \quad \sigma_x^2 = \frac{b-a}{12} \quad (1.4.1.2)$$

Такое распределение имеют:

- ошибки квантования по уровню при аналогово-цифровом преобразовании;
- случайная фаза узкополосного шума.

Исходным материалом для формирования случайных величин с различными законами распределения служат равномерно распределенные в интервале от 0 до 1 случайные числа, которые вырабатываются на компьютерах встроенными датчиками. Так как ошибки моделирования случайных величин с различными законами распределения зависят от качества этих датчиков, то рассмотрим подробнее, как формируются эти случайные последовательности.

Исторически первыми использовались таблицы случайных чисел. Очевидно их неудобство при решении современных задач.

Позднее использовались физические датчики случайных чисел. Для их реализации берется встроенный генератор шума и преобразователь напряжение-код. Такие генераторы используются редко, т.к. в них невозможно воспроизвести выборочную последовательность для повторения расчетов.

В настоящее время в основном используются программно реализованные генераторы псевдослучайных последовательностей. Наибольшее распространение получил

мультипликативно-конгруэнтный метод, основанный на использовании рекуррентного соотношения:

$$x_{n+1} = (ax_n + c) \bmod m, n \geq 1 \quad (1.4.1.3)$$

где $m = 2^{t-1}$ - разрядность целых двоичных чисел; a, c - целые положительные нечетные числа, на которые накладываются следующие ограничения:

$$\frac{m}{100} < a < m - m^{0.5} \quad (1.4.1.4)$$

$$\frac{c}{m} \approx 0.211132 \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{3}$$

Начальное значение x_0 для 1.4.1.3 может быть выбрано произвольно. Тогда величина $z_n = x_n / m$ имеет приближенно равномерное распределение.

Достоинством алгоритма является его простота и независимость от типа компьютера. Однако, этот метод требует тщательного подбора параметров, определяющих свойства псевдослучайной последовательности.

Например, для 32-разрядных ЭВМ можно использовать следующие значения: $a = 16070093$; $c = 453816693$; $m = 2^{31} = 2147483648$

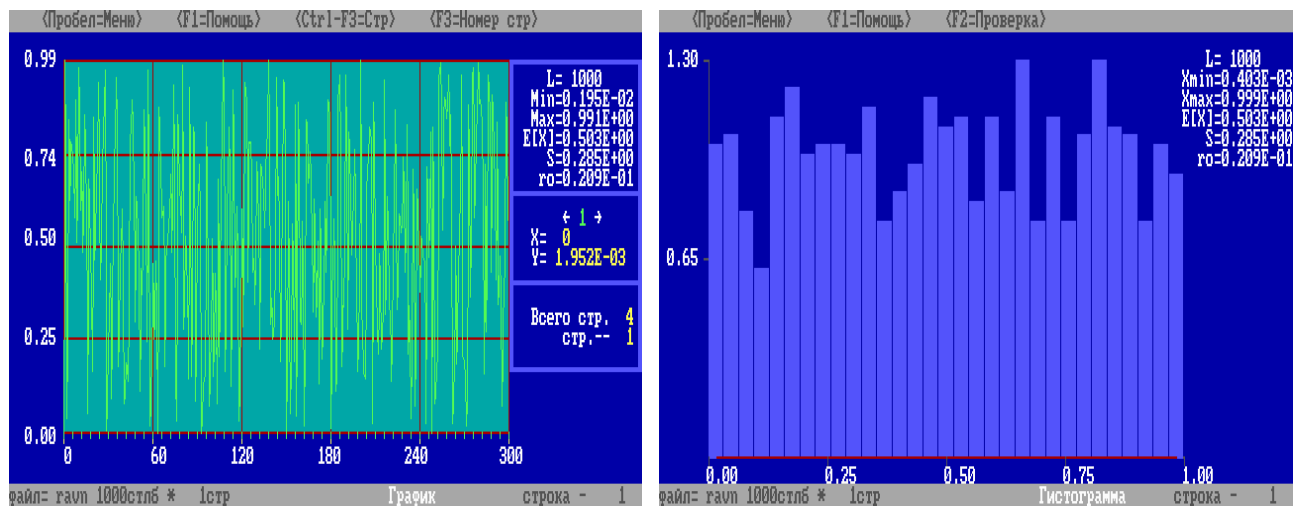


Рис.1.4.1.1 Случайные величины с равномерным законом распределения и их гистограмма.

1.4.2 Нормальный закон распределения

$$W(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad (1.4.2.1)$$

$$M_x = m, \sigma_x^2 = \sigma^2 \quad (1.4.2.2)$$

Такое распределение имеют большинство аддитивных ошибок измерения, полученных при многократных измерениях.

На практике используют различные методы получения случайных величин с нормальным законом распределения. Наиболее часто используются следующие:

а) Этот алгоритм вытекает из центральной предельной теоремы:

$$y = \sqrt{\frac{12}{n}} \sum_{i=1}^n (x_i - 0.5) \quad (1.4.2.3)$$

где x_i - равномерно распределенные от 0 до 1 случайные числа.

Наиболее удобно использовать значение $n = 12$. Тогда случайная величина y будет иметь практически нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией.

Однако этот алгоритм требует относительно больших затрат машинного времени и дает хорошее совпадение с нормальным законом распределения лишь при реализациях в тысячи отсчетов.

б) Второй алгоритм основан на известном факте, что распределение произведения двух независимых случайных величин, одна из которых имеет релеевское распределение, а другая распределена по закону арксинуса, является нормальным. Это позволяет использовать следующий алгоритм:

$$y = \sigma \sqrt{-2 \ln x_1 \cdot \sin(2\pi x_2)} \quad (1.4.2.4)$$

где x_1 и x_2 - независимые равномерно распределенные от **0** до **1** случайные числа.

Тогда y будет иметь нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ^2 .

в) Суть третьего алгоритма заключается в следующем:

- 1) Берутся два независимых равномерно распределенных от **0** до **1** случайных числа x_1 и x_2 (эти числа определяют координаты случайных точек на плоскости от **0** до **1**).
- 2) Числа преобразуются следующим образом:

$$x_1 = 2x_1 - 1;$$

$$x_2 = 2x_2 - 1;$$

в результате преобразования они оказываются равномерно распределены от **-1** до **1** (теперь числа определяют координаты случайных точек на плоскости от **-1** до **1**).

- 3) Вычисляется величина $d = x_1^2 + x_2^2$ (квадрат длины случайного вектора на плоскости, определяемого координатами x_1 и x_2).
- 4) Если выполняется условие $d \leq 1$ (проверка, вписывается ли случайный вектор в окружность с радиусом, равным **1**), то вычисляется величина:

$$c = \sqrt{\frac{-2 \ln d}{d}}$$

если нет, то происходит возврат к пункту 1.

- 5) Случайные величины

$$y_1 = cx_1$$

$$y_2 = cx_2$$

будут иметь нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией.

Достоинством алгоритма является то, что одновременно формируются два нормально распределенных случайных числа y_1 и y_2 .

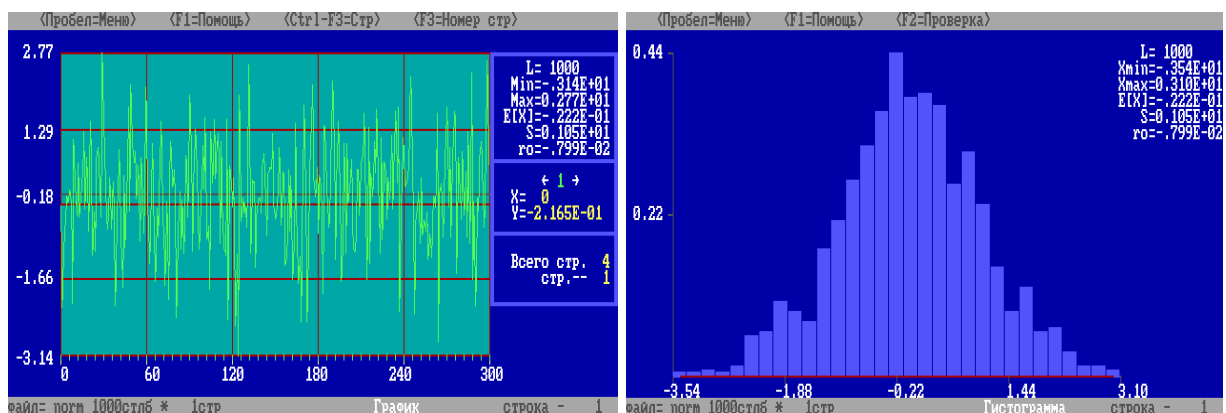


Рис.1.4.2.1 Случайные величины с нормальным законом распределения и их гистограмма.

1.4.3 Закон распределения Релея

$$W(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x}{\sigma^2}\right), & x \geq 0 \end{cases} \quad (1.4.3.1)$$

$$M_x = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma \approx 1,25\sigma; \quad (1.4.3.2)$$

$$\sigma_x^2 = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \sigma^2$$

Используется для описания случайной огибающей узкополосного случайного процесса (шума).

При моделировании в основном используют два алгоритма:

а) Полученный исходя из нелинейного преобразования:

$$y = \sigma \sqrt{-2 \ln x} \quad (1.4.3.3)$$

где x – случайная величина, равномерно распределенная от 0 до 1

б) Использующий свойство, что корень квадратный из суммы квадратов двух независимых случайных величин с нормальным законом распределения, распределен по Релею:

$$y = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \quad (1.4.3.4)$$

где x_1, x_2 – независимые нормально распределенные случайные числа с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией.

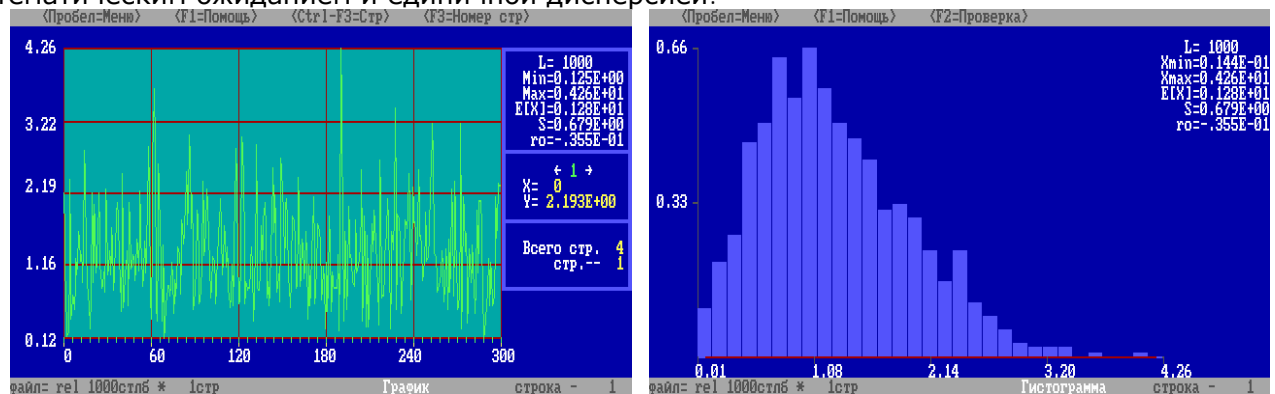


Рис. 1.4.3.1 Случайные величины с законом распределения Релея и их гистограмма.

1.4.4 Обобщенный закон распределения Релея (закон Релея-Райса)

$$W(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{(x^2 + a^2)}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{ax}{\sigma^2}\right), & x \geq 0 \end{cases} \quad (1.4.4.1)$$

Используется для описания огибающей суммы сигнала и узкополосного шума. Алгоритм моделирования имеет следующий вид:

$$y = \sqrt{(x_1 + a)^2 + x_2^2} \quad (1.4.4.2)$$

где x_1, x_2 - независимые нормально распределенные случайные числа с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ^2 .

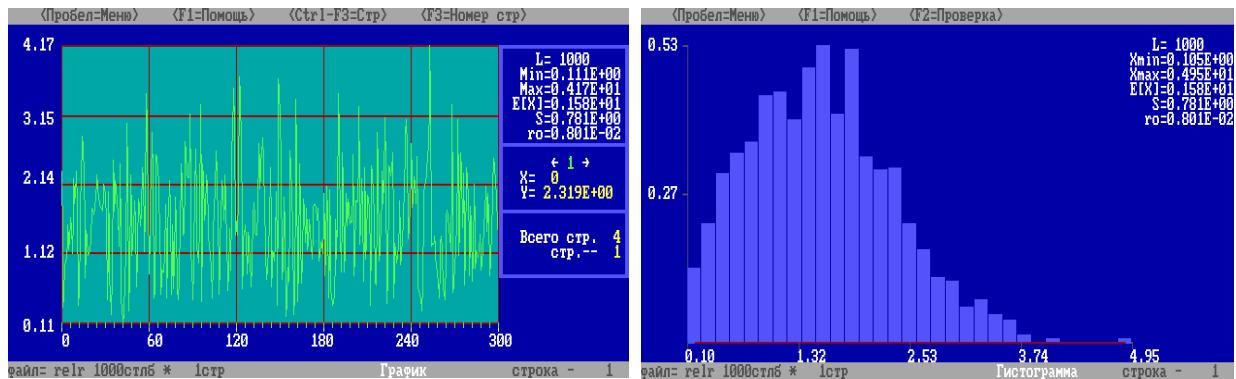


Рис.1.4.4.1 Случайные величины с законом распределения Релея-Райса и их гистограмма.

1.4.5 Экспоненциальный (показательный) закон распределения

$$W(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \exp(-\alpha \cdot x) = \exp\left(\frac{-x}{\sigma}\right), & x \geq 0 \end{cases} \quad (1.4.5.1)$$

$$\begin{aligned} M_x &= 1/\alpha = \sigma; \\ \sigma_x^2 &= 1/\alpha^2 = \sigma^2 \end{aligned} \quad (1.4.5.2)$$

Используется в теории массового обслуживания и теории надежности для моделирования времени безотказной работы системы из последовательно соединенных блоков, наработки «на отказ» и т. п.

При моделировании используют два алгоритма:

а) Полученный через нелинейное преобразование:

$$y = -\frac{1}{a} \ln x = -\sigma \ln x \quad (1.4.5.3)$$

где x – случайная величина, равномерно распределенная от 0 до 1.

б) Использующий свойство, что сумма квадратов двух нормально распределенных случайных величин распределена по экспоненциальному закону:

$$y = x_1^2 + x_2^2 \quad (1.4.5.4)$$

где x_1, x_2 - независимые нормально распределенные случайные числа с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ^2 .

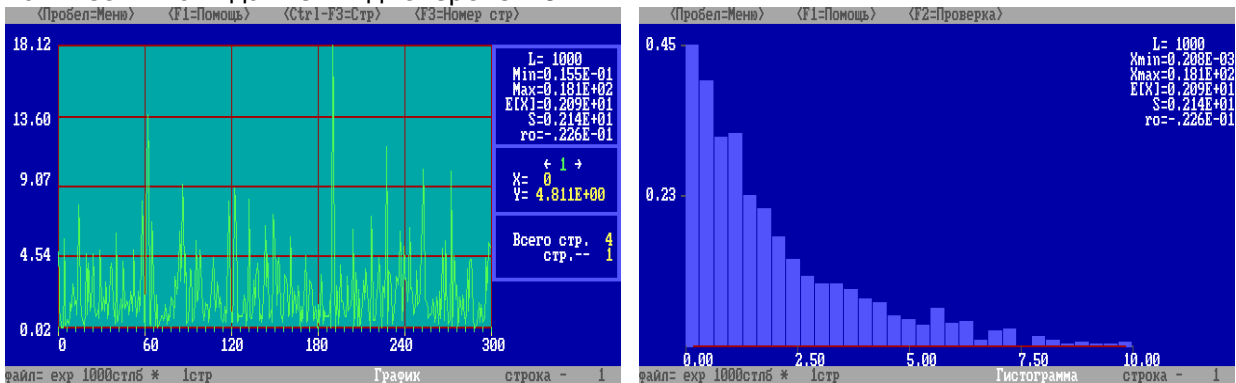


Рис.1.4.5.1 Случайные величины с экспоненциальным законом распределения и их гистограмма.

1.4.6 Логарифмически-нормальный закон распределения

$$W(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln x - m)^2}{2\sigma^2}\right), & x \geq 0 \end{cases} \quad (1.4.6.1)$$

$$M_x = \sqrt{e}\sigma; \quad (1.4.6.2)$$

$$\sigma_x^2 = e(e-1)\sigma^2$$

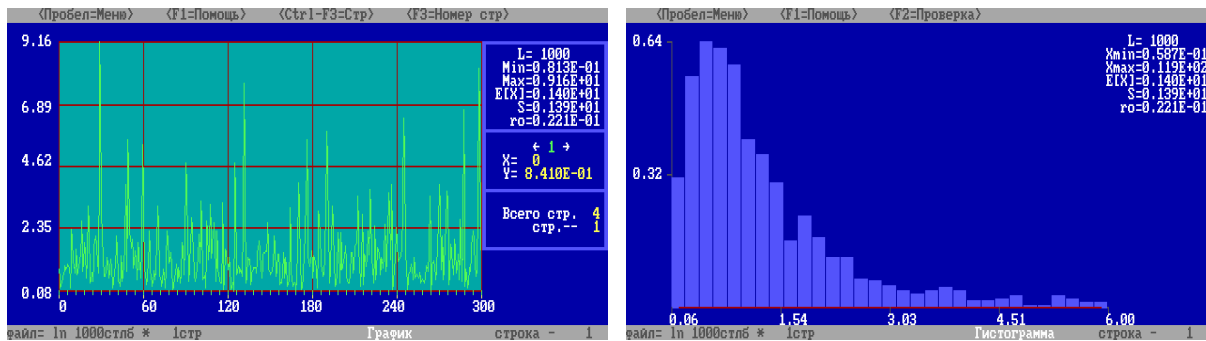


Рис.1.4.6.1 Случайные величины с логарифмически-нормальным законом распределения и их гистограмма.

Логарифмически нормальное распределение проявляется тогда, когда многие случайные величины действуют мультипликативно, т.е. действие их на изменение конечной величины примерно пропорционально их изменению. Алгоритм моделирования имеет следующий вид:

$$y = \exp(\sigma x + m) \quad (1.4.6.3)$$

где x - нормально распределенная случайная величина с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией.

2. Моделирование случайных векторов

Задачи моделирования на ЭВМ случайных векторов и случайных процессов, заданных на конечном интервале времени $(0, T)$, в принципе не отличаются, т.к. дискретные реализации случайных процессов, ограниченных во времени, можно рассматривать как выборочные значения N -мерных случайных векторов $(N = T/\Delta t)$. Существуют три основных метода моделирования на ЭВМ случайных векторов с заданным многомерным распределением.

2.1 Метод условных распределений

Этот метод позволяет моделировать многомерные случайные величины с произвольно заданной многомерной функцией плотности.

Пусть случайный вектор задан своей N -мерной функцией плотности $w(x_1, \dots, x_N)$

Одномерная функция плотности случайной величины имеет вид:

$$W(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} w(x_1, x_2) dx_2 \quad (2.1.1)$$

Рассмотрим сначала двумерный случай, когда вектор имеет две координаты x_1 и x_2 . Используя рассмотренные ранее способы моделирования случайных величин с заданными законами распределения, сформируем реализацию x_1^k случайной величины x_1 с функцией плотности (2.1.1).

Найдём условное распределение случайной величины x_2 :

$$w(x_2 / x_1^k) = w(x_1^k, x_2) / w(x_1^k) \quad (2.1.2)$$

И произведём выборку x_2^k случайной величины x_2 с функцией плотности $w(x_2 / x_1^k)$.

Полученная таким образом последовательность пар чисел x_1^k и x_2^k будет иметь совместную плотность $w(x_1, x_2)$.

Аналогично получаем и для N -мерного случая. Например, для $N = 3$, будет:

$$W(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w(x_1, x_2, x_3) dx_2 dx_3 \quad (2.1.3)$$

$$W(x_2 / x_1^k) = \int_{-\infty}^{\infty} w(x_1^k, x_2, x_3) dx_3 \quad (2.1.4)$$

$$w(x_3 / x_1^k, x_2^k) = w(x_1^k, x_2^k, x_3) / w(x_1^k) / w(x_2^k / x_1^k) \quad (2.1.5)$$

Однако, практическое использование этого способа связано с весьма громоздкими вычислениями, за исключением тех случаев, когда интегралы берутся в конечном виде. При больших значениях N способ практически не применяется.

2.2 Многомерный метод Неймана

Идея метода такая же, как и в одномерном случае с той разницей, что здесь имитируются случайные точки, равномерно распределённые не на плоскости под кривой, а в $(N + 1)$ -мерном объёме под N -мерной поверхностью.

Пусть $w(x_1, \dots, x_N)$ - N -мерная функция плотности случайного вектора y ; $k = 1, 2, \dots, N$ с областью определения (a_k, b_k) случайных координат y ; $k = 1, 2, \dots, N$.

По аналогии с одномерным случаем вырабатывается $(N + 1)$ случайных чисел x_1, \dots, x_{N+1} , равномерно распределённых в интервалах $(a_1, b_1), \dots, (a_N, b_N), (0, w_m)$ соответственно, где w_m - максимальное значение функции $w(y_1, \dots, y_N)$.

В качестве реализации случайного вектора y берутся реализации случайного вектора x , удовлетворяющие условию:

$$x_{N+1} \leq w(x_1, \dots, x_N) \quad (2.2.1)$$

Реализации случайных чисел $x_1 \dots x_{n+1}$, не удовлетворяющие этому условию, выбрасываются.

2.3 Метод линейного преобразования

Этот способ применим в тех случаях, когда достаточно обеспечить лишь заданную матрицу корреляционных моментов случайных векторов. Это возможно в связи со следующими обстоятельствами:

- нормальные случайные вектора, играющие очень важную роль в практических приложениях, однозначно задаются матрицей корреляционных моментов, и, следовательно, моделирование их в рамках корреляционной теории равносильно моделированию по заданным многомерным распределениям;
- случайные вектора, отличающиеся от нормальных, часто появляются в результате некоторых преобразований нормальных случайных векторов. Моделирование таких случайных векторов сводится к моделированию нормальных случайных векторов с последующим воспроизведением заданного преобразования, для чего достаточно обеспечить лишь необходимые корреляционные связи исходных (нормальных) векторов;
- многомерные законы распределения случайных векторов, не являющихся нормальными, весьма трудно получить теоретически и экспериментально. Их корреляционные моменты обычно определяются значительно проще. Поэтому практически в этих случаях многомерные законы распределения, как правило, неизвестны, а задача моделирования случайных векторов имеет смысл лишь в рамках корреляционной теории.

Основная идея метода линейного преобразования состоит в том, чтобы, выработав N независимых случайных величин $(x_1 \dots x_n)$, подвергнуть их такому линейному преобразованию A , после которого полученные величины $(y_1 \dots y_n)$ имели бы заданную корреляционную матрицу:

$$[R] = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \dots & R_{1N} \\ R_{21} & R_{22} & \dots & R_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{N1} & R_{N2} & \dots & R_{NN} \end{bmatrix} = M(y_i, y_j) \quad (2.3.1)$$

Известно, что произвольное линейное преобразование A N -мерного вектора x сводится к умножению его на некоторую матрицу:

$$[y] = [A] \cdot [x], \text{ где } [x] = (x_1, \dots, x_n)^T \\ [y] = (y_1, \dots, y_n)^T$$

Выберем матрицу $[A]$ треугольной:

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{NN} \end{bmatrix} \quad (2.3.2)$$

Тогда можно записать:

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \\ &\vdots \\ y_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

Элементы матрицы $[A]$ найдём из условия:

$$\begin{aligned} M(y_i, y_j) &= R_{ij} \\ M(x_i, x_j) &= \sigma_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

Для первых трех элементов:

$$\begin{aligned} M(y_1^2) &= a_{11}^2 = R_{11} \\ M(y_1 y_2) &= a_{11} a_{21} = R_{12} \\ M(y) &= a_{11}^2 + a_{21}^2 = R_{22} \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

Из этих уравнений получаем:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \sqrt{R_{11}}; \\ a_{21} &= \frac{\sqrt{R_{11}}}{R_{21}}; \\ a_{22} &= R_{22} - \frac{R_{11}}{R_{21}}; \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

Действуя таким образом, можно получить все элементы матрицы $[A]$. Тогда алгоритм выработки случайного вектора $[y]$ с заданной корреляционной матрицей сведётся к умножению матрицы $[A]$ на реализации вектора $[x_1 \dots x_n]$.

Отметим, что рассмотренный процесс моделирования позволяет получить лишь необходимые корреляционные связи между координатами случайного вектора. Законы распределения координат не принимаются во внимание, поэтому законы распределения координат исходного вектора могут быть произвольными, например, равномерными. Требуется только, чтобы случайные координаты $(x_1 \dots x_n)$ удовлетворяли условию некоррелированности.

Если законы распределения координат исходного вектора нормальные, то и искомым вектор будет нормальный (т.к. преобразования линейны). Этот способ при больших N становится неудобным, т.к. требует большой подготовительной работы.

Пример 2.3.1

Пусть требуется промоделировать случайный вектор с корреляционной матрицей следующего вида:

$$[R] = \begin{vmatrix} 1,0 & \dots & 0,9 \\ 0,9 & \dots & 1,0 \end{vmatrix}$$

Тогда из (2.3.6) следует:

$$\begin{aligned} a_{11} &= 1,0; \\ a_{21} &= 0,9; \\ a_{12} &= 0; \\ a_{22} &= \sqrt{1 - 0,9 \cdot 0,9} \end{aligned}$$

Алгоритм моделирования будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 \\ y_2 &= 0,9 \cdot x_1 + \sqrt{1 - 0,9 \cdot 0,9} \cdot x_2 \end{aligned}$$

где x_1 и x_2 - независимые случайные величины.

3. Моделирование случайных процессов

Рассмотренные ранее методы моделирования случайных векторов можно использовать и для моделирования случайных процессов.

Однако, при формировании реализации большой длины эти методы требуют большого количества вычислений и трудоемкой подготовительной работы, что затрудняет их практическое использование.

К сожалению, других более простых методов получения неограниченных во времени дискретных реализаций случайных процессов с заданным многомерным законом распределения или заданной корреляционной функцией до настоящего времени неизвестно.

Однако, на практике столь широко поставленные задачи моделирования случайных процессов встречаются редко, чаще требуется моделировать случайные процессы, относящиеся к определенному, более узкому классу случайных процессов. Например, стационарный нормальный случайный процесс; стационарные процессы, не являющиеся нормальными, но порождаемые нормальными в нелинейных системах и т.п.

3.1 Моделирование нормальных случайных процессов

Для стационарных нормальных случайных процессов найдены весьма экономичные моделирующие алгоритмы. В их основу положено линейное преобразование стационарной последовательности $x[n]$ независимых нормальных случайных чисел (дискретный белый шум) в последовательность $y[n]$, коррелированную по заданному закону.

При этом оператор линейного преобразования записывается либо в виде скользящего суммирования с некоторым весом $c_k = c[k]$:

$$y[n] = \sum_{k=1}^n c_k x[n-k] \quad (3.1.1)$$

либо как рекуррентное уравнение вида:

$$y[n] = \sum_{k=0}^l a_k x[n-k] - \sum_{k=1}^m b_k y[n-k], \text{ где } a_k = a[k], b_k = b[k] \quad (3.1.2)$$

Вид корреляционной функции случайного процесса, моделируемого с помощью этих алгоритмов, определяется набором значений a_k , b_k , c_k и их количеством, которое обычно невелико.

Алгоритмы отличаются простотой и позволяют формировать дискретные реализации случайных процессов сколь угодно большой длины. Параметры a_k , b_k , c_k определяются на этапе предварительной подготовки к моделированию.

Задачу цифрового моделирования с помощью скользящего суммирования и рекуррентных разностных уравнений можно рассматривать как задачу синтеза линейного дискретного формирующего фильтра, который преобразует белый шум на его входе в коррелированный дискретный случайный процесс с заданными корреляционно-спектральными характеристиками на его выходе (рис. 3.1.1).

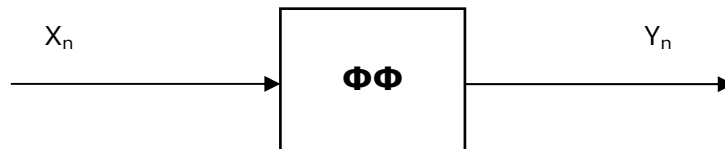


Рис. 3.1.1 Формирующий фильтр.

Передаточные функции фильтров имеют вид:

$$k(z) = c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_N z^N \quad (3.1.3)$$

$$k(z) = \frac{a_0 + a_1 z + \dots + a_k z^k}{1 + b_1 z + \dots + b_m z^m} \quad (3.1.4)$$

где z - дискретный оператор преобразования Лапласа.

3.1.1 Метод скользящего суммирования

Пусть задана последовательность $x[n]$ независимых случайных чисел с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией (нормированный дискретный белый шум).

Корреляционная функция последовательности $x[n]$:

$$R[n] = M\{x[k]x[k-n]\} = \sigma = \begin{cases} 1, n=0 \\ 0, n \neq 0 \end{cases} \quad (3.1.1.1)$$

Сформируем из последовательности $x[n]$ согласно алгоритму (3.1.1) новую:

$$\begin{aligned} y[n] &= c_1 x[n-1] + \dots + c_n x[n-N] \\ y[n+1] &= c_1 x[n] + \dots + c_n x[n+1-N] \end{aligned} \quad (3.1.1.2)$$

Случайная величина $y[n]$ получается путем суммирования с весами $c_1 \dots c_n$ N независимых случайных чисел, представляющих собой отрезок последовательности $x[n]$ (рис. 3.1.1).

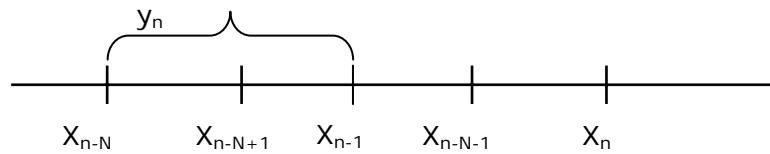


Рис. 3.1.1 Формирование случайной величины $y[n]$.

При этом, для вычисления определенного $y[n+1]$ исходная последовательность сдвигается на 1 элемент вправо, так что значения $x[n-N]$ выбрасываются.

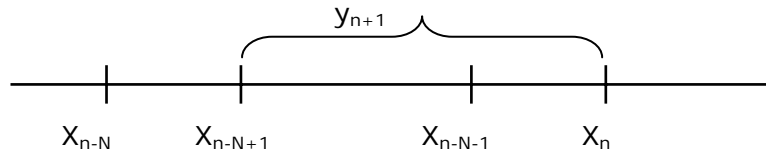


Рис. 3.1.2 Формирование случайной величины $y[n+1]$.

Зависимость (коррелированность) между случайными величинами $y[n]$ и $y[n+1]$ обеспечивается за счет того, что в их образовании участвует $[N-1]$ общее случайное значение последовательности $x[n]$. При $k = N$ значения $y[n]$ и $y[n-k]$ становятся некоррелированными.

Характер корреляционных связей процесса $y[n]$ определяется только набором c_k и не зависит от закона распределения исходных случайных чисел $x[n]$. Если исходные случайные числа распределены нормально, то в силу линейности преобразования последовательность $y[n]$ будет нормальным случайным процессом.

Корреляционная функция при этом будет определяться соотношением:

$$\begin{aligned} R[0] &= M\{y[n]y[n]\} = c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_n^2 \\ R[1] &= M\{y[n]y[n+1]\} = c_1 c_2 + c_2 c_3 + \dots + c_{n-1} c_n \\ R[N-1] &= c_1 c_n \\ R[N] &= 0 \end{aligned} \quad (3.1.1.3)$$

Вычисление корреляционной функции по этим формулам можно свести к перемножению матриц:

$$\begin{pmatrix} R[0] \\ R[1] \\ \dots \\ R[N-1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_{n-1} & c_n \\ c_2 & c_3 & \dots & c_n & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_n & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix} \quad (3.1.1.4)$$

Если коэффициенты c_k заданы, то корреляционную функцию случайного процесса, формируемого методом скользящего суммирования, можно легко найти. Гораздо сложнее решить обратную задачу - определить коэффициенты c_k по заданной корреляционной функции.

Возможные пути её решения:

- 1) Получение весовых коэффициентов путём решения нелинейной алгебраической системы уравнений.
- 2) Получение весовых коэффициентов путём разложения функции спектральной плотности в ряд Фурье.

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau; \quad G(\omega) = G_0 |K(j\omega)|^2; \quad K(j\omega) = \left[\frac{G(\omega)}{G_0} \right]^{1/2}$$

в качестве c_k можно принять дискретные отсчеты импульсной характеристики:

$$c_k = h(k\Delta t) \rightarrow h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \left[\frac{G(\omega)}{G_0} \right]^{1/2} \cos(\omega t) d\omega$$

$$t \rightarrow k\Delta t; \quad c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \left[\frac{G(\omega)}{G_0} \right]^{1/2} \cos(\omega k\Delta t) d\omega$$

- 3) Получение весовых коэффициентов методом факторизации (если нормальный дискретный шум то $G_0 = 1$).

$$G(\omega) = G_0 |K(j\omega)|^2 = |K(j\omega)|^2 = K(j\omega) K(-j\omega)$$

- 4) Если известно, что процесс является результатом воздействия белого шума на линейную систему с заданной передаточной функцией $K(p)$ и импульсной (или переходной) характеристикой $h(t)$, то при моделировании удобно использовать данную систему как формирующий фильтр. При этом c_k совпадают с $h_k = h[k\Delta t]$.

Если модулируемый процесс задан своей корреляционной функцией, а энергетический спектр процесса неизвестен, причём вычисление его через преобразование Фурье затруднительно, то целесообразно использовать **первый** метод.

Если процесс задан спектром или спектр легко находится через **КФ**, то используется **второй** метод.

Третий метод целесообразно использовать тогда, когда процесс является процессом с рациональным спектром, однако в этом случае, как правило, более эффективны рекуррентные уравнения.

Четвёртый метод наиболее простой. Он используется тогда, когда известна импульсная или переходная характеристика.

Пример 3.1.1

Пусть требуется сформировать реализацию случайного процесса, корреляционная функция которого задается следующим образом:

$$\begin{aligned} R[0] &= 1; \\ R[1] &= 0; \\ R[2] &= -0,5; \end{aligned}$$

Процесс задан своей корреляционной функцией, спектр неизвестен и вычисление его через преобразование Фурье затруднительно, поэтому в данном случае целесообразно найти весовые коэффициенты через решение нелинейной алгебраической системы уравнений.

$$R[0] = c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1$$

$$R[1] = c_1 c_2 + c_2 c_3 = 0$$

$$R[2] = c_1 c_3 = -0,5$$

Решением ее будут значения коэффициентов

$$c_1 = \sqrt{0,5}$$

$$c_2 = 0$$

$$c_3 = -\sqrt{0,5}$$

а алгоритм будет выглядеть следующим образом:

$$y_n = 0,707 \cdot x_{n-1} - 0,707 \cdot x_{n-3}$$

где x_n - последовательность независимых случайных чисел.

3.1.2 Метод рекуррентных разностных уравнений

Рекуррентные алгоритмы пригодны только для моделирования процессов с рациональным спектром:

$$G(\omega) = \frac{G_1(\omega)}{G_2(\omega)} = \frac{K_1(j\omega)K_1(-j\omega)}{K_2(j\omega)K_2(-j\omega)} \quad (3.1.2.1)$$

где G_1 и G_2 - полиномы степени l и $m > l$ соответственно.

Применение рекуррентных алгоритмов наиболее эффективно тогда, когда корреляционная функция моделируемых процессов имеет невысокий порядок, определяемый числом полюсов спектральной функции, так как в этих случаях моделирующие алгоритмы очень просты, не имеют методических погрешностей, и их параметры удаётся выразить в явном виде через параметры корреляционной функции.

Отсутствие методической погрешности понимается в том смысле, что дискретные реализации $y[n]$, полученные на ЭВМ, и последовательности $y(n\Delta t)$ выборочных значений процесса $y(t)$ в точности совпадают при любом Δt , если считать исходные случайные числа $x[n]$ строго независимыми и нормальными.

Параметры рекуррентных алгоритмов получают методами:

- факторизации;
- дискретизации непрерывного формирующего фильтра.

3.2 Типовые алгоритмы моделирования нормальных случайных процессов с часто встречающимися корреляционными функциями

Здесь приводятся результаты применения описанных выше методов для моделирования стационарных нормальных процессов с распространёнными корреляционными функциями.

Во все алгоритмы заложен принцип преобразования последовательности $x[n]$ независимых нормально распределённых случайных чисел с нулевым мат. ожиданием и единичной дисперсией (дискретный белый шум) в последовательность $y[n]$ с корреляционной функцией:

$$R[N] = M\{y[k]y[k-n]\} = R(n\Delta t) \quad (3.2.1)$$

3.2.1 Случайный процесс с экспоненциальной корреляционной функцией

$$R(\tau) = \sigma^2 \exp(-\alpha|\tau|) \quad (3.2.1.1)$$

$$G(\omega) = \frac{2\sigma^2}{\alpha} \frac{1}{1+\omega^2/\alpha^2} = \frac{2\sigma^2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \quad (3.2.1.2)$$

Алгоритм моделирования:

$$y[n] = \rho y[n-1] + \sigma \sqrt{1 - \rho^2} x[n] \quad (3.2.1.3)$$

где $\rho = \exp(-\alpha \Delta t)$ - коэффициент корреляции между соседними отсчетами (3.2.1.4)

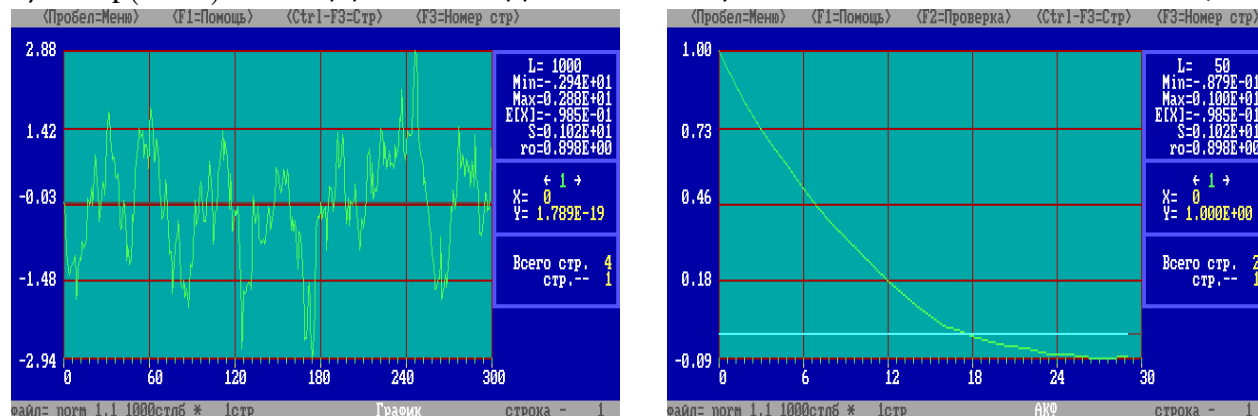


Рис. 3.2.1.1 Случайный процесс с нормальным распределением и экспоненциальной корреляционной функцией (временная реализация и корреляционная функция)

3.2.2 Случайный процесс с экспоненциально-косинусной корреляционной функцией

$$B(\tau) = \sigma^2 \exp(-\alpha |\tau|) \cos(\omega_0 |\tau|) \quad (3.2.2.1)$$

$$G(w) = \frac{2\sigma^2}{\alpha} \frac{1 + x^2 + x_0^2}{[1 + (x + x_0)^2][1 + (x - x_0)^2]} \quad (3.2.2.2)$$

где $x = w/\alpha$; $x_0 = w_0/\alpha$

Алгоритм моделирования:

$$y[n] = a_0 x[n] + a_1 x[n-1] + b_1 y[n-1] + b_2 y[n-2] \quad (3.2.2.3)$$

$$\rho = \exp(-\alpha \Delta t);$$

$$a_0 = \sigma \alpha_1; \quad a_1 = \sigma \alpha_0 / \alpha_1;$$

где $b_1 = 2\rho \cos(w_0 \Delta t)$; $b_2 = -\rho^2$; (3.2.2.4)

$$\alpha_0 = \rho(\rho^2 - 1) \cos(w_0 \Delta t); \quad \alpha_1 = \sqrt{\frac{\alpha^2 \pm \sqrt{\alpha^2 - 4a_0^2}}{2}}; \quad a_2 = 1 - \rho^4;$$

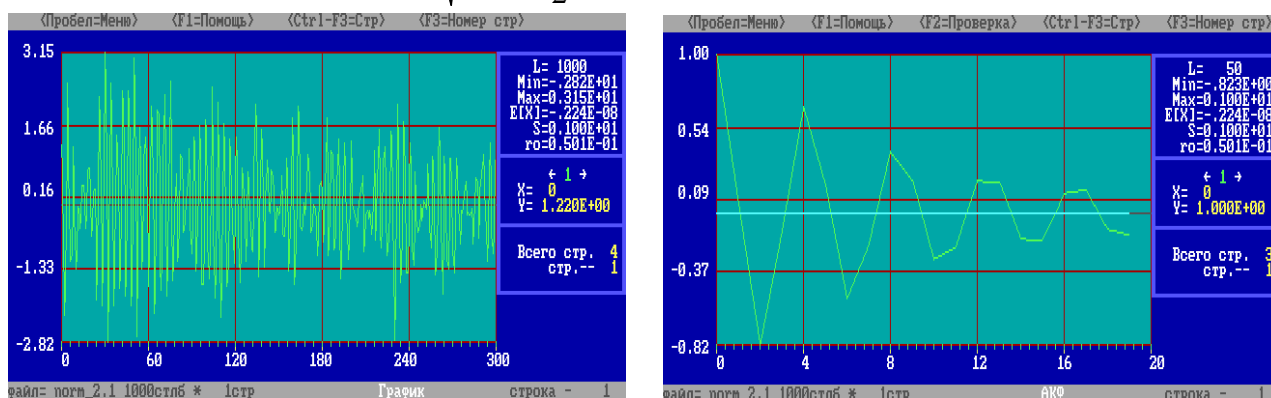


Рис. 3.2.2.1 Случайный процесс с нормальным распределением и экспоненциально-косинусной корреляционной функцией (временная реализация и корреляционная функция)

3.2.3 Случайный процесс с корреляционной функцией вида

$$R(\tau) = \sigma^2 \exp(-\alpha|\tau|)(1 + \alpha|\tau|) \quad (3.2.3.1)$$

$$G(w) = \frac{4\sigma^2}{\alpha} \frac{1}{(1 + w^2/\alpha^2)^2} = \frac{4\sigma^2\alpha^3}{(\alpha^2 + w^2)^2} \quad (3.2.3.2)$$

Алгоритм моделирования:

$$y[n] = a_0x[n] + a_1x[n-1] + b_1y[n-1] + b_2y[n-2] \quad (3.2.3.4)$$

где:

$$a_0 = \sigma\alpha_1;$$

$$a = \sigma\alpha_0 / \alpha_1;$$

$$b_1 = 2\rho;$$

$$b_2 = -\rho^2;$$

$$\alpha_0 = \rho^3(1 + \alpha\Delta t) - \rho(1 - \alpha\Delta t); \quad (3.2.3.5)$$

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{\alpha_2 \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\alpha_0^2}}{2}};$$

$$\alpha_2 = 1 - 4\rho^2\alpha\Delta t - \rho^4$$

$$\rho = \exp(-\alpha\Delta t)$$

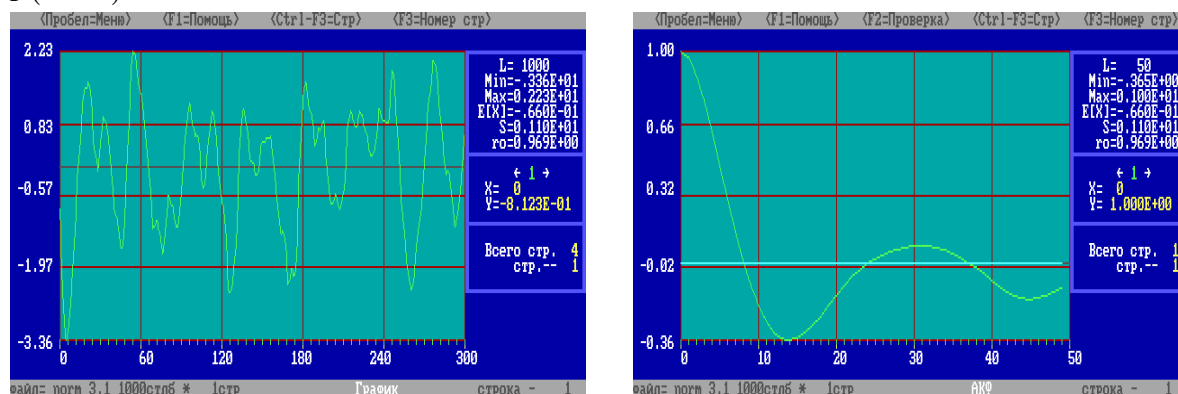


Рис.3.2.3.1 Случайный процесс с нормальным распределением и корреляционной функцией вида (3.2.3.1) (временная реализация и корреляционная функция)

3.2.4 Случайный процесс с прямоугольным спектром и корреляционной функцией $\sin(x)/x$

$$R(\tau) = \sigma^2 \frac{\sin(w_0\tau)}{w_0\tau} \quad (3.2.4.1)$$

$$G(w) = \begin{cases} \frac{\pi\sigma^2}{w_0}, & w \leq w_0 \\ 0, & w > w_0 \end{cases} \quad (3.2.4.2)$$

Алгоритм моделирования:

$$y[n] = \sum_{k=1}^p c_k x[n-k] \quad (3.2.4.3)$$

где

$$c_k = \frac{\sigma}{\sqrt{4\pi w_0 \Delta t}} \cdot \frac{\sin(w_0 k \Delta t)}{k}; \quad w_0 \cdot \Delta t \leq \pi \quad (3.2.4.4)$$

Количество слагаемых при суммировании p берется таким, пока коэффициенты c_k не станут пренебрежимо малы.

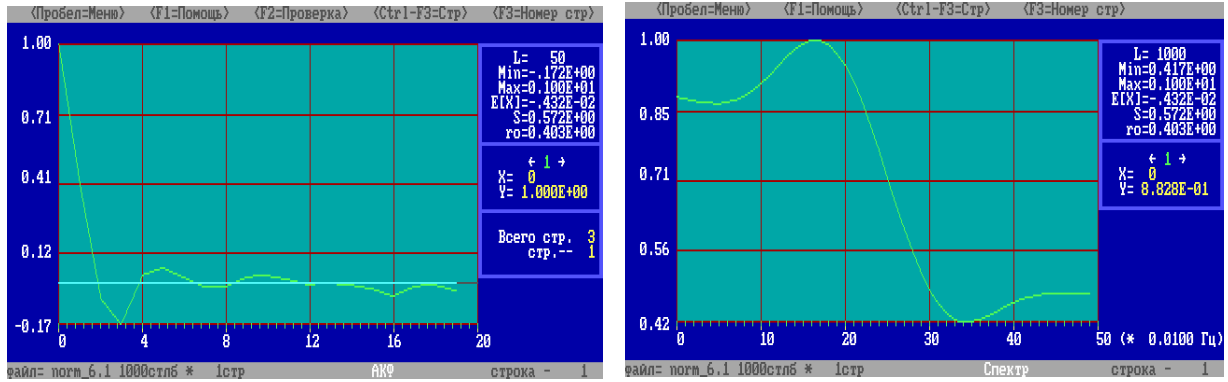


Рис.3.2.4.1 Случайный процесс с нормальным распределением и корреляционной функцией вида $\sin(x)/x$
(корреляционная функция и спектральная плотность)

3.2.5 Случайный процесс с экспоненциальным спектром и корреляционной функцией вида

$$R(\tau) = \frac{\sigma^2}{1 + w_0^2 \tau^2} \quad (3.2.5.1)$$

$$G(w) = \frac{\pi \sigma^2}{w_0} e^{-\frac{|w|}{w_0}} \quad (3.2.5.2)$$

Алгоритм моделирования:

$$y[n] = \sum_{k=0}^p c_k x[n-k] \quad (3.2.5.3)$$

где

$$c_k = 2\sigma \sqrt{w_0 \Delta t / \pi} \cdot \frac{1}{1 + 4w_0^2 \Delta t^2 k^2} \quad (3.2.5.4)$$

$$w_0 \cdot \Delta t \leq 0,5$$

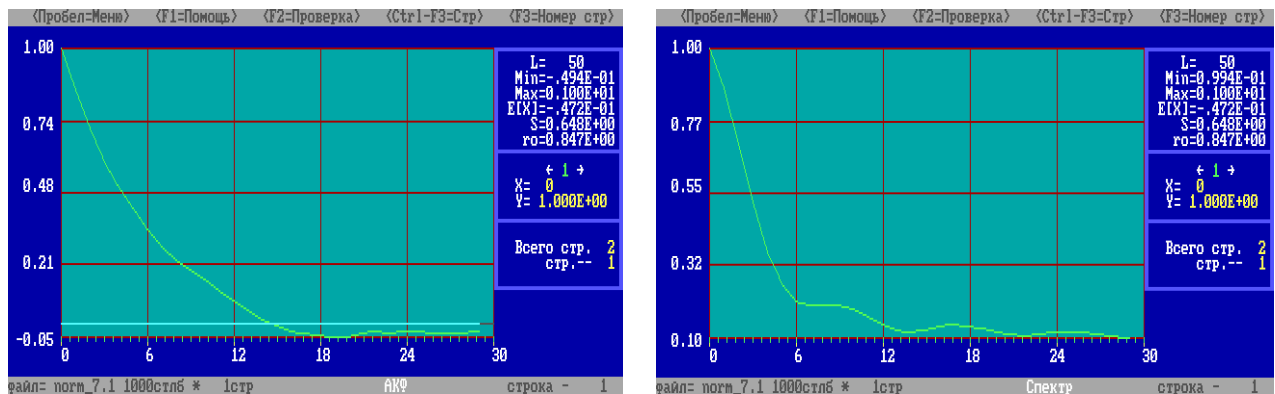


Рис. 3.2.5.1 Случайный процесс с нормальным распределением, корреляционной функцией вида (3.2.5.1) и экспоненциальным спектром
(корреляционная функция и спектральная плотность)

3.2.6 Случайный процесс с треугольной корреляционной функцией

$$r(\tau) = \begin{cases} \sigma^2 (1 - w_0 |\tau|), & |\tau| \leq \frac{1}{w_0} \\ 0, & |\tau| > \frac{1}{w_0} \end{cases} \quad (3.2.6.1)$$

$$G(w) = \frac{4\sigma^2}{w_0} \cdot \frac{\sin^2 x}{x^2} \quad (3.2.6.2)$$

где $x = w / w_0$.

Алгоритм моделирования:

$$y[n] = \frac{\sigma}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x[n-k] \quad (3.2.6.3)$$

где

$$N = \text{trunc} \left[1 / (w_0 \Delta t) \right] \quad (3.2.6.4)$$

Случайные процессы 3.2.1-3.2.1.2 относятся к классу случайных процессов с рациональной спектральной плотностью. Для их моделирования наиболее удобно применение рекуррентных алгоритмов, не имеющих методических погрешностей. Для процессов 3.2.1.3-3.2.2.1, которые не относятся к классу процессов с рациональной спектральной плотностью, был применён метод скользящего суммирования. Алгоритмы 3.2.1.3-3.2.2.1 являются приближенными, однако при увеличении количества слагаемых при суммировании методическая погрешность может быть уменьшена.

Существуют два метода, которые позволяют расширить класс моделируемых стационарных нормальных случайных процессов путём несложных преобразований рассмотренных выше алгоритмов.

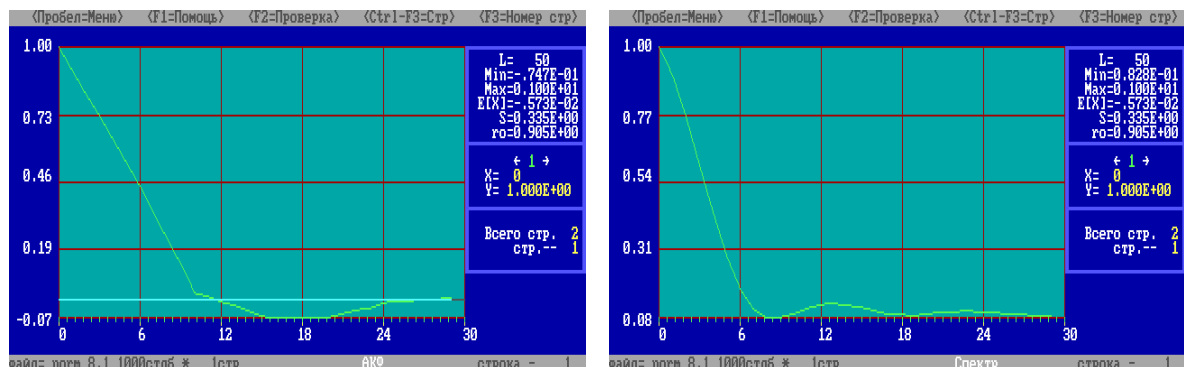


Рис.3.2.6.1 Случайный процесс с нормальным распределением и треугольной корреляционной функцией

(корреляционная функция и спектральная плотность)

а) Известно, что при суммировании нескольких независимых стационарных нормальных случайных процессов образуется стационарный нормальный случайный процесс, корреляционная функция которого равна сумме корреляционных функций слагаемых. Следовательно, если корреляционная функция является суммой двух или нескольких корреляционных функций из рассмотренных выше, то реализацию случайного процесса можно сформировать путём суммирования двух или нескольких независимых реализаций, полученных по типовым алгоритмам.

Пример 3.2.6.1

Пусть требуется получить реализацию нормального случайного процесса, корреляционная функция которого имеет вид:

$$R(\tau) = \sigma^2 \exp(-\alpha\tau) [\cos w_1\tau + \cos w_2\tau]$$

Такой случайный процесс можно представить в виде суммы двух процессов:

$$y[n] = y_1[n] + y_2[n]$$

где $y_1[n]$ - случайный процесс с корреляционной функцией:

$$R_1(\tau) = \sigma^2 \exp(-\alpha\tau) \cos w_1\tau$$

а $y_2[n]$ - случайный процесс с корреляционной функцией:

$$R_2(\tau) = \sigma^2 \exp(-\alpha\tau) \cos w_2\tau$$

Для моделирования таких случайных процессов можно воспользоваться типовыми алгоритмами (3.2.6)

$$\begin{aligned} y_1[n] &= a_{01}x_1[n] + a_{11}x_1[n-1] + b_{11}y_1[n-1] + b_{12}y_1[n-2] \\ y_2[n] &= a_{02}x_2[n] + a_{12}x_2[n-1] + b_{12}y_2[n-1] + b_{22}y_2[n-2] \end{aligned} \quad (3.2.5.1)$$

где $x_1[n]$ и $x_2[n]$ - независимые между собой нормальные случайные последовательности с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией. Коэффициенты $a_{01}, a_{11}, b_{11}, b_{12}$ рассчитываются в соответствии с выражениями (3.2.2.4), используя значения параметров корреляционной функции $R_1(\tau)$ α и w_1 , коэффициенты $a_{01}, a_{11}, b_{11}, b_{12}$ рассчитываются в соответствии с выражениями (3.2.2.1), используя значения параметров корреляционной функции $R_2(\tau)$ α и w_2 .

б) Из теории случайных процессов известна следующая теорема.

Если $y_1(t)$ и $y_2(t)$ - два стационарных нормальных центрированных и независимых случайных процесса с корреляционной функцией $R(\tau)$, то случайный процесс:

$$y(t) = y_1(t) \sin(wt) + y_2(t) \cos(wt) \quad (3.2.6.5)$$

будет также стационарным нормальным центрированным случайным процессом с корреляционной функцией:

$$R_{\Sigma}(\tau) = R(\tau) \cos(w\tau) \quad (3.2.6.6)$$

Это позволяет легко моделировать нормальные случайные процессы с корреляционной функцией вида (3.2.6.6), если известен алгоритм для моделирования нормального случайного процесса с корреляционной функцией $R(\tau)$.

Для этого надо выработать дискретные реализации двух независимых случайных процессов $y_1[n]$ и $y_2[n]$ с корреляционными функциями $R(\tau)$, а затем в соответствии с (3.2.26) преобразовать их:

$$y[n] = y_1[n] \sin(w n \Delta t) + y_2[n] \cos(w n \Delta t) \quad (3.2.6.7)$$

Пример 3.2.6.1

Пусть требуется получить реализацию нормального случайного процесса, корреляционная функция которого имеет вид:

$$R(\tau) = \sigma^2 \exp(-\alpha\tau) \cos w_1\tau \cos w_2\tau$$

Заметим, что известен алгоритм для моделирования нормального случайного процесса с корреляционной функцией $R_1(\tau) = \sigma^2 \exp(-\alpha\tau) \cos w_1\tau$ (3.2.6). Чтобы сформировать реализацию требуемого процесса, необходимо по типовым алгоритмам получить две независимые реализации случайных процессов с такой корреляционной функцией:

$$\begin{aligned} y_1[n] &= a_0x_1[n] + a_1x_1[n-1] + b_1y_1[n-1] + b_2y_1[n-2] \\ y_2[n] &= a_0x_2[n] + a_1x_2[n-1] + b_1y_2[n-1] + b_2y_2[n-2] \end{aligned}$$

где $x_1[n]$ и $x_2[n]$ - независимые между собой нормальные случайные последовательности с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией. Коэффициенты a_0, a_1, b_1, b_2 рассчитываются в соответствии с выражениями (3.2.2.1), используя значения параметров корреляционной функции $R_1(\tau)$ α и w_1 . Для получения требуемой реализации остается только подвергнуть y_1 и y_2 нелинейному преобразованию (3.2.6.7):

$$y[n] = y_1[n] \sin(w_2 n \Delta t) + y_2[n] \cos(w_2 n \Delta t)$$

3.3 Моделирование случайных процессов с распределениями плотности вероятности отличными от нормальных

Процессы, отличные от нормальных, задаются обычно своим многомерным распределением. При небольшом числе дискретных точек задачу моделирования такого процесса можно решить как задачу формирования реализаций случайного вектора по заданному многомерному распределению. Для этого надо применить один из рассмотренных выше способов, например, метод условного распределения плотностей вероятностей или многомерный метод Неймана. Однако, при формировании реализаций большой длины эти методы практически использовать невозможно.

Поэтому на практике, как правило, рассматривается более узкая задача моделирования ненормальных стационарных случайных процессов, а именно, моделирование процессов по их одновременно заданным корреляционным функциям и одномерным законам распределения. Эта задача сравнительно легко решается путем специально подобранных нелинейных преобразований соответствующих нормальных стационарных случайных процессов.

Пусть в качестве исходного выбран стационарный нормальный случайный процесс $x(t)$. Как известно, всегда существует такое нелинейное безинерционное преобразование $y = f(x)$, которое превращает нормальную функцию плотности вероятности $w_0(x)$ в заданную $w(y)$.

Если исходный процесс $x(t)$ имеет корреляционную функцию $R_0(\tau)$, то преобразованный $y(t)$ будет иметь корреляционную функцию $R(\tau)$, отличающуюся от $R_0(\tau)$ и связанную с ней зависимостью $R = \Phi(R_0)$. Вид этой зависимости определяется преобразованием $y = f(x)$ (рис. 3.3.1).

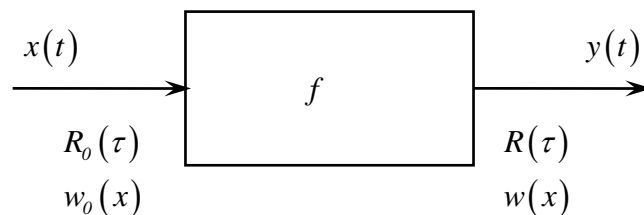


Рис.3.3.1.Преобразование исходного случайного процесса.

Для того, чтобы корреляционная функция преобразованного процесса была требуемой, нужно выбрать корреляционную функцию исходного процесса равной $R_0 = \Phi^{-1}(R)$, где Φ^{-1} - обратная функция. Таким образом, подготовительная работа перед моделированием состоит из следующих этапов:

- 1) нахождение по заданной плотности вероятности $w(y)$ преобразования $y = f(x)$;
- 2) получение по заданной функции $y = f(x)$ зависимости $\Phi(R_0)$;
- 3) решение уравнения $R = \Phi(R_0)$ относительно R_0 , т.е. определение корреляционной функции $R_0(\tau)$ исходного процесса $x(t)$;
- 4) отыскание алгоритма для моделирования нормального случайного процесса $x(t)$ с корреляционной функцией $R_0(\tau)$.

На этом подготовительная работа заканчивается, а моделирование сводится к формированию дискретных реализаций x_n нормального случайного процесса $x(t)$ с корреляционной функцией $R_0(\tau)$ и преобразованию этих реализаций:

$$y_n = f\{x_n\} \quad (3.3.1)$$

Следует отметить, что подготовительная работа является довольно трудоемкой. Ее можно упростить, если использовать особенность функции $\Phi(R_0)$ и применять отличные от описанных нелинейные преобразования, например, двух нормальных случайных процессов.

3.4 Типовые алгоритмы моделирования стационарных случайных процессов с распространенными одномерными законами распределения плотности вероятности

3.4.1 Случайный процесс с равномерным распределением

Пусть требуется получить дискретную реализацию стационарного случайного процесса, равномерно распределенного на интервале $(-a, +a)$ и имеющего корреляционную функцию:

$$R(\tau) = \sigma^2 r(\tau) = \frac{(2\alpha)^2}{12} r(\tau) = \frac{\alpha^2}{3} r(\tau) \quad (3.4.1.1)$$

Здесь через $r(\tau)$ обозначена **нормированная корреляционная функция**.

Для получения стационарного случайного процесса $y(t)$ с равномерным распределением из нормального $x(t)$ достаточно последний подвергнуть нелинейному преобразованию с характеристикой нелинейности типа «сглаженный ограничитель» (рис. 3.4.1).

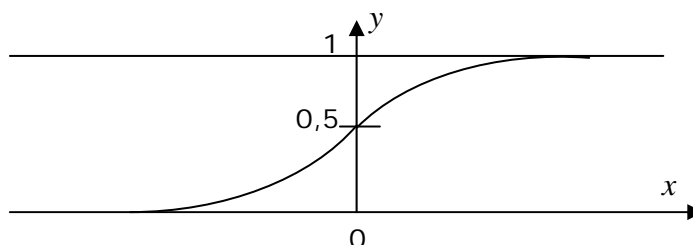


Рис. 3.4.1.1 Характеристика нелинейности типа «сглаженный ограничитель»

Точное выражение для функции $f(x)$ в случае, когда процесс $x(t)$ является нормальным с нулевым мат. ожиданием и единичной дисперсией будет иметь вид:

$$f(x) = 2\alpha [\Phi(x) - 0,5] = \frac{2\alpha}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^x e^{-t^2/2} dt \quad (3.4.1.2)$$

где $\Phi(x)$ - функция Лапласа.

Корреляционную функцию процесса, получаемого с помощью такого преобразования, удастся выразить через корреляционную функцию исходного процесса:

$$R(\tau) = \frac{2\alpha^2}{\pi} \cdot \arcsin\left(\frac{r_0(\tau)}{2}\right) \quad (3.4.1.3)$$

Определяем отсюда $r_0(\tau)$ и с учетом (3.4.1.1) получаем:

$$r_0(\tau) = 2 \sin\left(\frac{\pi R(\tau)}{2\alpha^2}\right) = 2 \sin\left(\frac{\pi r(\tau)}{6}\right) \quad (3.4.1.4)$$

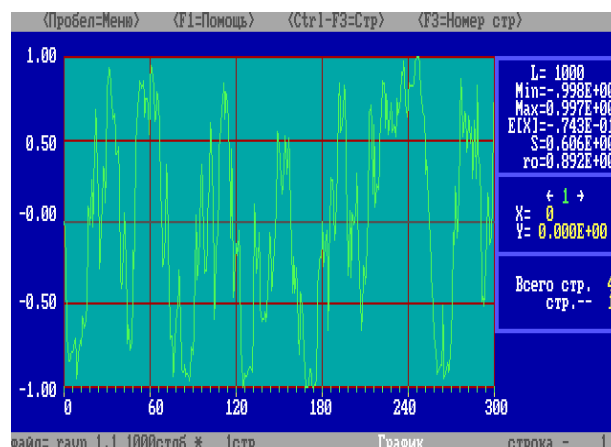
Поскольку нормированная корреляционная функция не может превышать по модулю **1**, то аргумент синуса в (3.4.1.4) лежит в пределах от $-\frac{\pi}{6}$ до $+\frac{\pi}{6}$. И его можно заменить прямой, внося несущественную погрешность:

$$r_0(\tau) \approx 2 \frac{\pi}{6} r(\tau) \approx r(\tau) \quad (3.4.1.5)$$

Таким образом, «сглаженный ограничитель», превращающий нормальный случайный процесс в процесс с равномерным распределением, почти не искажает энергетический спектр исходного процесса, и корреляционные функции процессов на его входе и выходе будут примерно равны:

$$r_0(\tau) \approx r(\tau) \quad (3.4.1.6)$$

Рис.3.4.1.2. Случайный процесс с равномерным распределением и экспоненциальной корреляционной функцией (временная реализация)



3.4.2 Случайный процесс с распределением Релея

Случайный процесс с таким распределением имеет следующие статистические характеристики:

$$\begin{aligned} w(y) &= \frac{t}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{y^2}{\sigma^2}\right) \\ m_y &= \sqrt{\pi/2} \sigma \\ \sigma_y^2 &= (2 - \pi/2) \sigma^2 \end{aligned} \quad (3.4.2.1)$$

Искомый процесс получается в результате преобразования:

$$y(t) = \sqrt{X_1^2(t) + X_2^2(t)} \quad (3.4.2.2)$$

где $X_1(t), X_2(t)$ - нормальные случайные процессы с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ^2 .

Корреляционная функция искомого процесса имеет вид:

$$R(\tau) = \pi/2 \sigma^2 \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 r_0(\tau) + \left(\frac{1}{2 \cdot 4}\right)^2 r_0^4(\tau) + \dots \right] \quad (3.4.2.3)$$

где $r_0(\tau)$ - нормированная корреляционная функция исходного процесса.

Подставив значения математического ожидания и дисперсии из (3.4.2.1), получим:

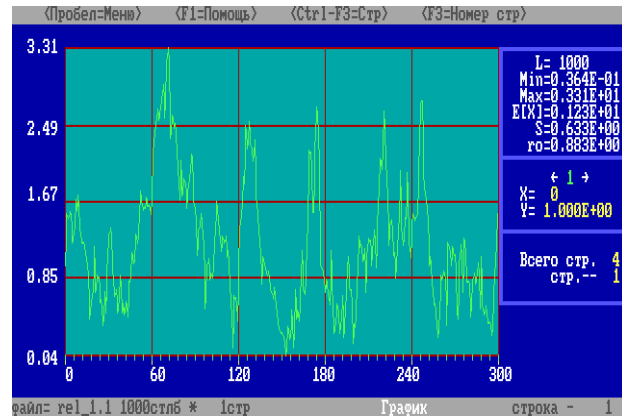
$$R(\tau) = m_y^2 + \sigma_y^2 r(\tau) = \frac{\pi}{2} \sigma^2 + (2 - \pi) \sigma^2 r(\tau) = \pi \sigma^2 \left[1 + \frac{4 - \pi}{\pi} r(\tau) \right] \quad (3.4.2.4)$$

В задачах, не требующих высокой точности, можно ограничиться двумя первыми членами разложения в ряд, учитывая также, что $\frac{4 - \pi}{\pi} \approx \frac{1}{4}$, получим:

$$\begin{aligned} r(\tau) &\approx r_0^2(\tau) \\ r_0(\tau) &\approx \sqrt{r(\tau)} \end{aligned} \quad (3.4.2.5)$$

Этот метод пригоден только для случаев, когда заданная корреляционная функция не принимает отрицательных значений.

Рис. 3.4.2.1 Случайный процесс с распределением Релея и экспоненциальной корреляционной функцией (временная реализация)



3.4.3 Случайный процесс с экспоненциальным распределением

Случайный процесс с таким распределением имеет следующие статистические характеристики:

$$w(y) = \alpha \exp(-\alpha y) = \frac{1}{2\sigma^2} \exp\left(-\frac{y}{2\sigma^2}\right) \quad (3.4.3.1)$$

$$\alpha = 1/2\sigma^2; \quad m_y = 1/\alpha; \quad \sigma_y^2 = 1/\alpha^2 = 4\sigma^4$$

Алгоритм, позволяющий получить случайный процесс с таким законом распределения:

$$y(t) = X_1^2(t) + X_2^2(t) \quad (3.4.3.2)$$

где $X_1(t), X_2(t)$ - нормальные случайные процессы с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ^2 .

Его корреляционная функция имеет вид:

$$R(\tau) = 4\sigma^2 [1 + r_0^2] \quad (3.4.3.3)$$

Подставив значения математического ожидания и дисперсии из (3.4.3.1), получим:

$$R(\tau) = m_y^2 + \sigma_y^2 r(\tau) = 4\sigma^4 + 4\sigma^4 r(\tau) = 4\sigma^4 [1 + r(\tau)] \quad (3.4.3.4)$$

Сравнивая (3.4.3.3) и (3.4.3.4), получаем:

$$r_0(\tau) = \sqrt{r(\tau)} \quad (3.4.3.5)$$

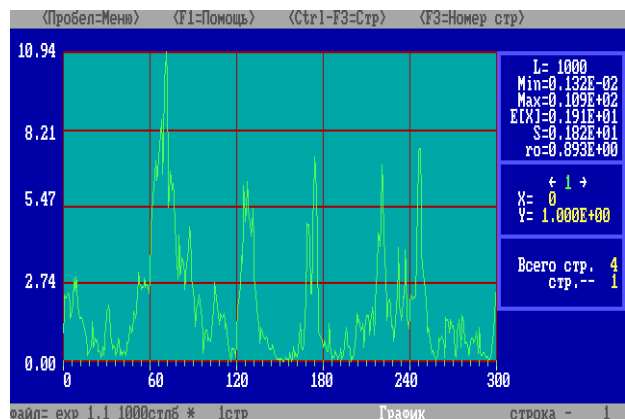
Алгоритм моделирования будет состоять из двух частей:

1) формирование реализаций нормальных случайных процессов с корреляционной функцией $r_0(\tau)$;

2) нелинейное преобразование (3.4.3.2)

Этот метод пригоден только для случаев, когда заданная корреляционная функция не принимает отрицательных значений.

Рис. 3.4.3.1 Случайный процесс с экспоненциальным распределением и экспоненциальной корреляционной функцией (временная реализация)



3.4.4 Случайный процесс с логарифмически-нормальным распределением

$$w(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} \exp\left(-\frac{(\ln y)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (3.4.4.1)$$

Алгоритм, позволяющий получить случайный процесс с таким законом распределения имеет вид:

$$y(t) = \exp(\sigma X[t]) \quad (3.4.4.2)$$

где $X[t]$ - нормальный случайный процесс с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ^2 .

Корреляционная функция искомого процесса имеет вид:

$$R(\tau) = \sigma^2 \exp(r_0(\tau) + I) \quad (3.4.4.3)$$

Нормированная корреляционная функция:

$$r(\tau) = \frac{R(\tau) - m_y^2}{\sigma_y^2} = \frac{\sigma^2 e^{r_0(\tau) + I} - e\sigma^2}{e(e-1)\sigma^2} = \frac{e^{r_0(\tau)} - 1}{e - 1} \quad (3.4.4.4)$$

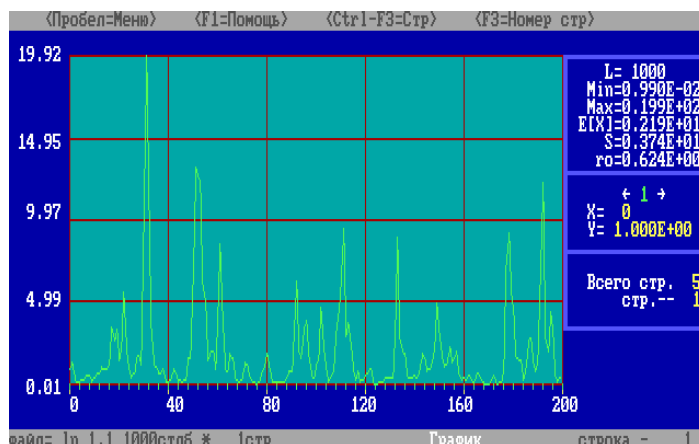
Откуда корреляционная функция исходного процесса:

$$r_0(\tau) = \ln[1 + (e - 1)r(\tau)] \quad (3.4.4.5)$$

К сожалению, алгоритм имеет ограничение:

$$r(\tau) > -\frac{1}{e} \approx -0,37 \quad (3.4.4.6)$$

Рис. 3.4.4.1 Случайный процесс с логарифмически-нормальным распределением и экспоненциальной корреляционной функцией (временная реализация)



3.5 Моделирование многомерных нормальных случайных процессов

Многомерный стационарный случайный процесс определяется как совокупность N стационарных связанных между собой случайных процессов. Многомерные случайные процессы используются при описании многомерных (многоканальных) систем. Рассмотрим здесь только моделирование нормальных многомерных стационарных случайных процессов.

Обозначим такой процесс X_{nk} , где n - координата, k - текущее время.

N -мерный дискретный нормальный стационарный случайный процесс задается обычно своей корреляционной матрицей:

$$R[k] = R_{nl}[k] \quad n = 1 \dots N; \quad l = 1 \dots N \quad (3.5.1)$$

где $R_{nk}[k]$ - автокорреляционные функции (при $n = l$) или взаимно корреляционные функции (при $n \neq l$) случайного процесса X_{nk} .

Задачу цифрового моделирования многомерного нормального случайного процесса сформулируем следующим образом. Пусть задана корреляционная матрица случайного

процесса. Требуется отыскать алгоритм для формирования на ЭВМ дискретных реализаций случайного процесса с заданными корреляционными свойствами.

Для решения этой задачи воспользуемся, как и ранее, идеей формирующего линейного фильтра. В данном случае речь идет о синтезе многомерного формирующего фильтра (рис.3.17). N -мерный линейный формирующий фильтр определяется как линейная динамическая система с N входами и N выходами.

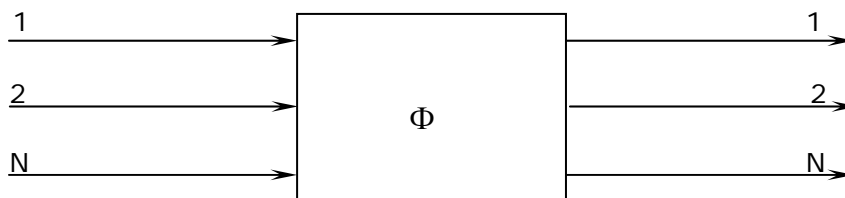


Рис. 3.5.1. Многомерный формирующий фильтр

Если $[X_n]_k$ - входное воздействие, а $[Y_n]_k$ - выходное, где $n = 1 \dots N$, k - текущее время, то связь между входом и выходом N -мерного дискретного фильтра определяется выражением:

$$[Y_n(z)] = [K_{nl}(z)][X_n(z)] \quad (3.5.2)$$

где $[Y_n(z)], [X_n(z)]$ - изображения выходных и входных сигналов в смысле дискретного преобразования Лапласа (Z -преобразования)

$[K_{nl}(z)]$ - передаточная матрица дискретного N -мерного фильтра. Например, для двумерного случая фильтр будет выглядеть следующим образом:

$$K_{nl}(z) = \begin{bmatrix} K_{11}(z) & K_{12}(z) \\ K_{21}(z) & K_{22}(z) \end{bmatrix} \quad (3.5.3)$$

или

$$\begin{aligned} Y_1(z) &= K_{11}(z) X_1(z) + K_{12}(z) X_2(z); \\ Y_2(z) &= K_{21}(z) X_1(z) + K_{22}(z) X_2(z) \end{aligned} \quad (3.5.4)$$

Видно, что каждый из выходных сигналов является суммой линейных операторов от входных сигналов X_1 и X_2 .

Пусть на вход N -мерного линейного фильтра подан N -мерный белый шум, т.е. процесс с корреляционной матрицей вида:

$$[R_{nl}[k]] = \begin{bmatrix} \delta[k] & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \delta[k] \end{bmatrix} \quad (3.5.5)$$

т.е. N -мерный белый шум определен здесь как совокупность N независимых между собой δ -коррелированных случайных процессов.

Многомерная фильтрация белого шума осуществляется достаточно просто: каждая составляющая $[Y_n]_k$ ($n = 1 \dots N$, k -время) случайного процесса на выходе получается путем суммирования n составляющих $[X_n]_k$ ($n = 1 \dots N$) входного процесса, отфильтрованных одномерными фильтрами с передаточными функциями $K_{nl}(Z)$.

Пример 3.5.1

Пусть требуется получить реализацию двумерного нормального случайного процесса с корреляционной матрицей следующего вида:

$$R(\tau) = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 \cdot \exp(-\alpha_1 |\tau|) & \rho \sigma_1 \sigma_2 \cdot \exp(-\alpha_{12} |\tau|) \\ \rho \sigma_1 \sigma_2 \cdot \exp(-\alpha_{12} |\tau|) & \sigma_2^2 \cdot \exp(-\alpha_2 |\tau|) \end{bmatrix}$$

Каждая составляющая случайного процесса на выходе многомерного формирующего фильтра будет представлять собой сумму:

$$\begin{aligned}y_1[k] &= y_{11}[k] + y_{12}[k] \\ y_2[k] &= y_{21}[k] + y_{22}[k]\end{aligned}$$

где $y_{11}[k]$ - результат прохождения "белого" шума через формирующий фильтр, позволяющий получить случайный процесс с экспоненциальной корреляционной функцией

$$R_{11}(\tau) = \sigma_1^2 \cdot \exp(-\alpha_1|\tau|)$$

Такой алгоритм рассматривался ранее (3.2.1.2), он имеет вид:

$$\begin{aligned}y_{11}[k] &= \rho_1 \cdot y_{11}[k-1] + \sigma_1 \cdot \sqrt{1-\rho_1^2} \cdot x_1[k] \\ \rho_1 &= \exp(-\alpha_1 \cdot \Delta t)\end{aligned}$$

$y_{12}[k]$ - результат прохождения "белого" шума через формирующий фильтр, позволяющий получить случайный процесс с корреляционной функцией

$$R_{12}(\tau) = \rho \sigma_1 \sigma_2 \cdot \exp(-\alpha_{12}|\tau|)$$

Алгоритм будет иметь вид:

$$\begin{aligned}y_{12}[k] &= \rho_{12} \cdot y_{12}[k-1] + \sigma_{12} \cdot \sqrt{1-\rho_{12}^2} \cdot x_2[k] \\ \rho_{12} &= \exp(-\alpha_{12} \cdot \Delta t), \quad \sigma_{12} = \sqrt{\rho \sigma_1 \sigma_2}\end{aligned}$$

$y_{21}[k]$ - результат прохождения "белого" шума (**другой реализации!**) через аналогичный фильтр, поэтому алгоритм формирования будет такой же, как и ранее (обратите внимание, что **входное воздействие – другое!**):

$$y_{21}[k] = \rho_{12} \cdot y_{21}[k-1] + \sigma_{12} \cdot \sqrt{1-\rho_{12}^2} \cdot x_1[k]$$

$y_{22}[k]$ - результат прохождения "белого" шума через формирующий фильтр, позволяющий получить случайный процесс с экспоненциальной корреляционной функцией

$$R_{22}(\tau) = \sigma_2^2 \cdot \exp(-\alpha_2|\tau|)$$

Алгоритм будет иметь вид:

$$\begin{aligned}y_{22}[k] &= \rho_2 \cdot y_{22}[k-1] + \sigma_2 \cdot \sqrt{1-\rho_2^2} \cdot x_2[k] \\ \rho_2 &= \exp(-\alpha_2 \cdot \Delta t)\end{aligned}$$

Здесь $x_1[k]$ и $x_2[k]$ - независимые между собой нормальные случайные последовательности с нулевыми математическими ожиданиями и единичными дисперсиями.

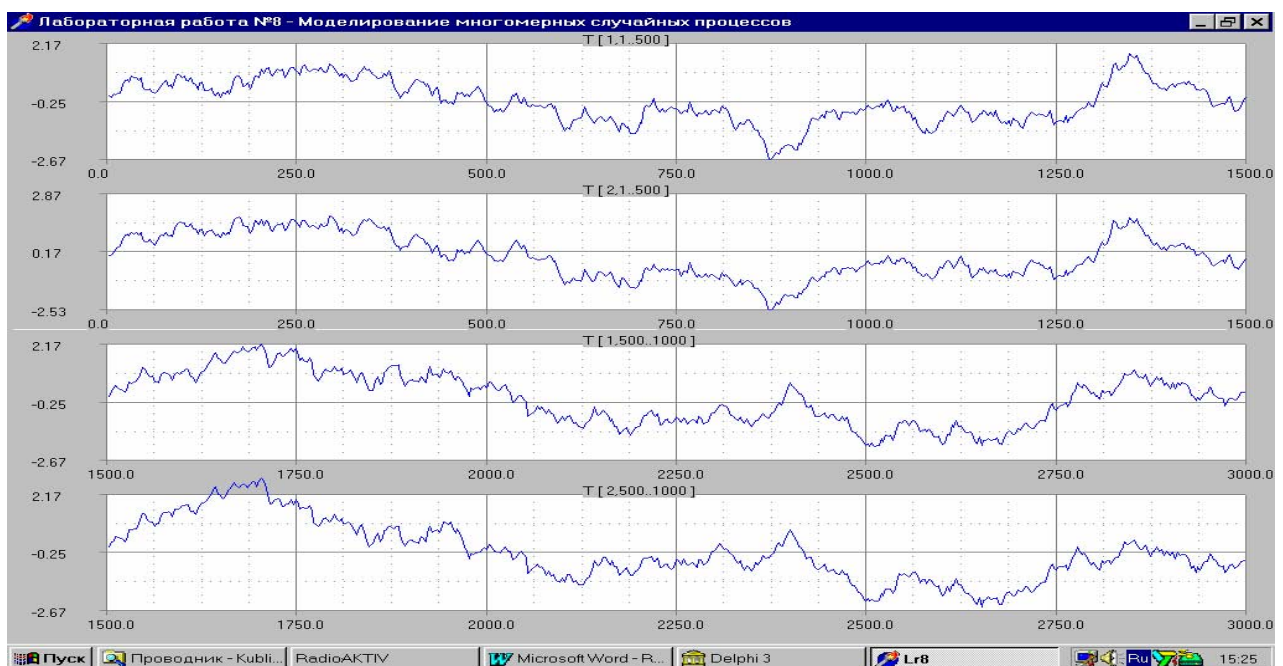


Рис.3.5.2 Двумерный случайный процесс

3.6 Моделирование нестационарных случайных процессов

Стационарный случайный процесс - это такой случайный процесс, статистические характеристики которого не зависят от начала отсчета времени. Нестационарным случайным процессом называется такой процесс, у которого хотя бы одна статистическая характеристика зависит от времени.

При моделировании различают следующие типы нестационарностей:

- по математическому ожиданию (среднему);
- по дисперсии (СКО);
- по корреляционной функции (спектральной плотности);
- по виду плотности распределения вероятностей;
- сложные виды нестационарностей.

3.6.1 Моделирование нестационарности по математическому ожиданию

При моделировании нестационарностей по математическому ожиданию нормальный случайный процесс представляют в виде суммы:

$$Y[n] = X[n] + a[n] \quad (3.6.1.1)$$

где $a[n]$ - неслучайная функция времени, $x[n]$ - стационарный случайный процесс с нулевым средним.

Функция $a[n]$ является моделируемым (медленноменяющимся) математическим ожиданием (средним). Если $x[n]$ рассматривать как помеху, а $a[n]$ - как сигнал, то такая помеха будет аддитивной.

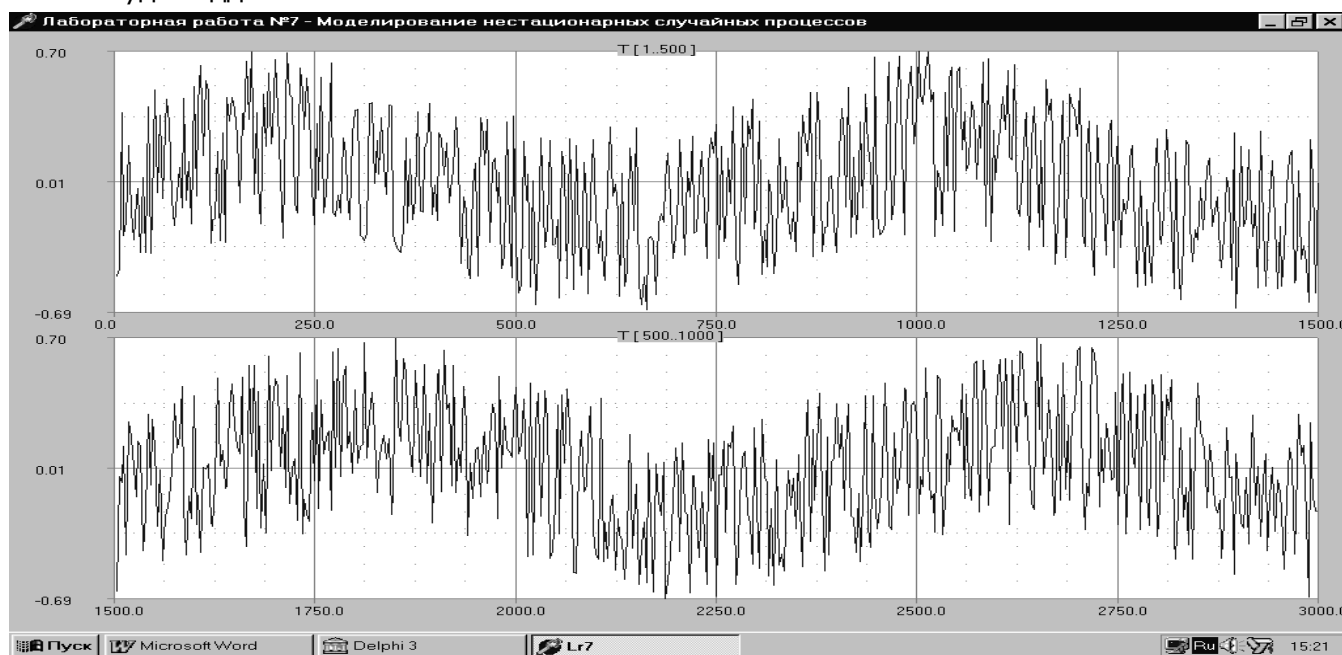


Рис. 3.6.1.1 Случайный процесс, нестационарный по среднему

3.6.2 Моделирование нестационарности по дисперсии

При моделировании нестационарностей по дисперсии нормальный случайный процесс представляют в виде:

$$Y[n] = b[n]x[n] \quad (3.6.2.1)$$

где $x[n]$ - стационарный случайный процесс, $b[n]$ - неслучайная функция времени, обычно медленноменяющаяся.

Если $x[n]$ рассматривать как помеху, а $b[n]$ - как сигнал, то такая помеха называется мультипликативной.

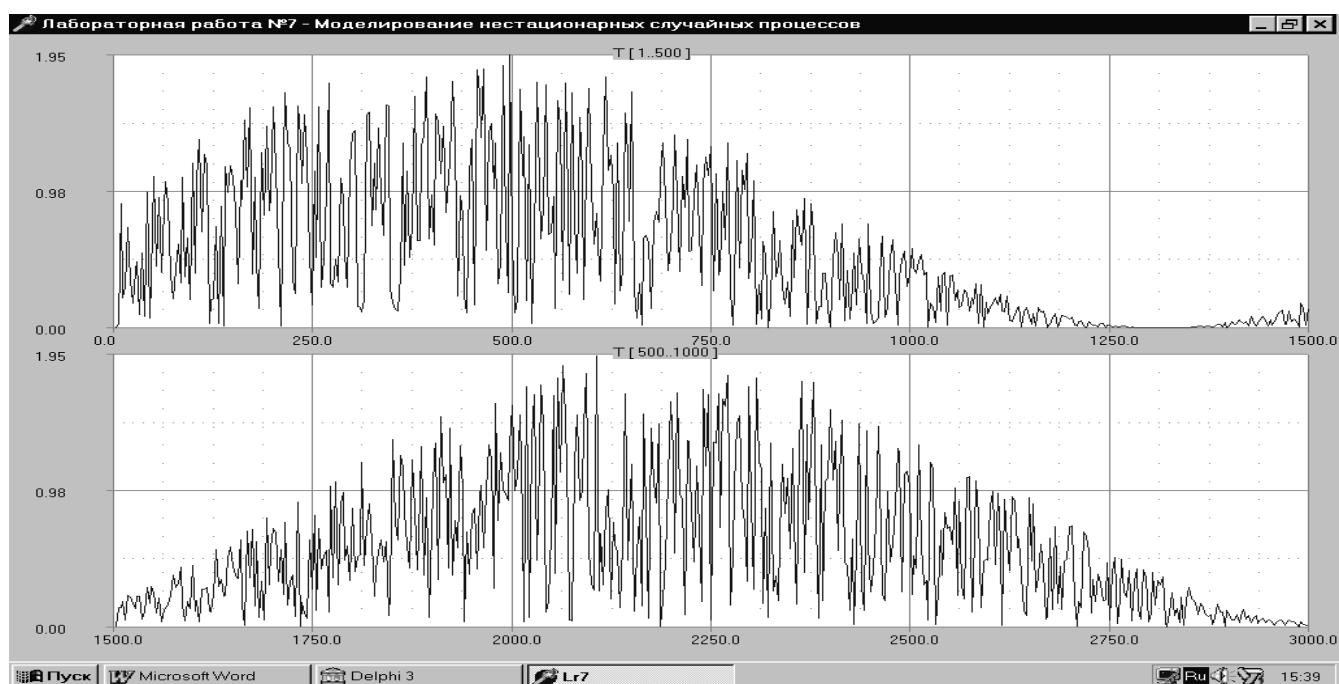


Рис. 3.6.2.1 Случайный процесс нестационарный по СКО

3.7 Моделирование нестационарности по корреляционной функции (спектральной плотности) или одномерной плотности

Процессы, нестационарные по спектральной плотности (корреляционной функции), изменяют свои частотные свойства во времени. Они возникают в нестационарных линейных системах управления. Процессы, нестационарные по плотности распределения, встречаются в нестационарных нелинейных системах, когда нелинейные характеристики отдельных блоков зависят от времени.

При моделировании нестационарностей по корреляционной функции (спектральной плотности) или одномерной плотности обычно используют кусочно-стационарные случайные процессы.

3.7.1 Процессы со сложными видами нестационарности

Процессы со сложными видами нестационарности трудно охарактеризовать общими свойствами. Они образуются в виде комбинации рассмотренных выше видов нестационарностей.

4. Моделирование случайных потоков

Потоки случайных событий, происходящих в случайные моменты времени t_1, t_2, \dots, t_n являются специфичным классом случайных процессов (рис. 4.1).

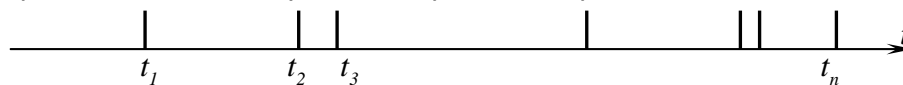


Рис. 4.1 Случайный поток.

Случайные потоки широко используются в качестве математических моделей в задачах, связанных с исследованием систем массового обслуживания, в задачах приема импульсных сигналов, в задачах надежности.

В общем случае потоки задаются с помощью многомерной плотности распределения вероятностей интервалов между моментами наступления событий:

$$w(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) \quad (4.1)$$

где $\tau_n = t_n - t_{n-1}$; $t_0 = 0$

При таком задании случайных потоков моделирование их сводится к формированию реализаций случайных векторов с законом распределения (4.1), для чего могут быть использованы известные методы.

Моменты наступления событий при этом определяются по простой рекуррентной формуле:

$$t_n = t_{n-1} + \tau_n; \quad (4.2)$$

Случайные потоки столь общего вида встречаются в приложениях достаточно редко. Обычно рассматриваются так называемые **потоки с ограниченным последствием**, у которых интервалы $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ статистически независимы, т.е:

$$w(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) = w_1(\tau_1) w_2(\tau_2) w_3(\tau_3) \dots w_n(\tau_n) \quad (4.3)$$

Эти потоки задаются последовательностью одномерных законов распределения $w_n(\tau_n)$.

Потоки, у которых $w_1(\tau_1) = w_2(\tau_2) = \dots = w_n(\tau_n)$ называются **рекуррентными стационарными потоками**. Они определяются только одним одномерным законом $w(\tau)$.

К таким потокам относится, в частности, широко распространенный пуассоновский поток, у которого закон распределения интервалов между событиями показательный:

$$w(\tau) = \lambda e^{-\lambda \tau} \quad (4.4)$$

где λ - интенсивность событий.

Моделирование таких потоков довольно просто. Для этого необходимо:

1) получать реализацию случайной величины τ_k с заданным законом $w(\tau)$;

$$\tau_k = \ln \left(\frac{X_k}{\lambda} \right) \quad (4.5)$$

2) вычислять моменты наступления событий:

$$t_n = t_{n-1} + \tau_n \quad (4.6)$$

5. Моделирование случайных полей

Случайными полями называются случайные функции многих переменных. В общем случае, обычно их четыре - x, y, z, t где x, y, z – пространственные координаты, t – временная координата.

Обозначим случайное поле следующим образом:

$$\xi(x, y, z, t) = \xi(r, t) \quad (5.1)$$

Случайные поля могут быть скалярными (одномерными) и векторными (N - мерными). В общем случае скалярное поле задается совокупностью своих N - мерных распределений $w(y_1, y_2, \dots, y_n)$.

Если статистические характеристики поля не изменяются при изменении начала отсчета времени, т. е. зависят только от разности $\tau = t_2 - t_1$, то такое поле называют стационарным.

Если перенос начала координат не влияет на статистические характеристики поля, т. е. зависят только от сдвига $\rho = r_2 - r_1$, то такое поле называется однородным по пространству.

Примерами полей являются элементарные поля, диаграммы вторичного излучения целей, на формирование которых оказывают влияние случайные параметры, статистически неровные поверхности, в частности земная и морская поверхности.

Как и ранее, под задачей моделирования понимается разработка алгоритмов для формирования на компьютере дискретных реализаций поля $\xi(x_i, y_j, z_k, t_n)$. При этом полагается, что исходным при моделировании случайного поля являются независимые случайные числа. Совокупность таких чисел рассматривается как случайное δ - **коррелированное поле** или δ - поле (это обобщение дискретного белого шума на случай нескольких переменных).

Моделирование такого поля осуществляется весьма просто: пространственно-временной координате (x_i, y_j, z_k, t_n) ставится в соответствие выбранное значение x_δ числа из датчика нормальных случайных чисел.

В общем случае, если известен N - мерный закон распределения, случайное поле можно моделировать как случайный N - мерный вектор, используя известные методы.

На практике рассмотреть это достаточно трудно. Упрощения можно добиться, если разработать алгоритмы для специальных классов случайных полей.

Рассмотрим моделирование стационарных однородных скалярных нормальных случайных полей. Такие поля полностью задаются своими пространственно-временными корреляционными функциями (математическое ожидание предполагается равным нулю):

$$R(\rho, \tau) = M \{ \xi(r, t) \xi(r + \rho, t + \tau) \} \quad (5.2)$$

или функцией спектральной плотности поля, представляющей собой четырехмерное преобразование Фурье от корреляционных функций (обобщение Винера-Хинчина):

$$G(s, w) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R(\rho, \tau) e^{-j(sp + w\tau)} dp d\tau \quad (5.3)$$

где sp - скалярное произведение векторов (s_x, s_y, s_z) и (p_x, p_y, p_z) .

Неограниченные дискретные реализации однородного стационарного поля можно сформировать с помощью алгоритмов пространственно-временного скользящего суммирования δ - поля, аналогичных алгоритмам скользящего суммирования для моделирования случайных процессов.

Пусть $h(r, t)$ - импульсная переходная характеристика пространственно-временного фильтра, формирующего из δ - поля поле с заданной функцией спектральной плотности $G(s, w)$.

Она может быть получена путем четырехмерной трансформации Фурье функции: $\sqrt{G(s, w)}$.

$$h(r, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K(js, jw) e^{j(sp + wt)} ds dw = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \sqrt{G(s, w)} \cos(sp + wt) ds dw \quad (5.4)$$

Тогда процесс пространственно-временной фильтрации δ - поля получается в виде:

$$\xi[i, j, k, n] = \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t = \sum_p \sum_q \sum_l \sum_m h[p, q, l, m] x_s[i - p, j - q, k - l, n - m] \quad (5.5)$$

Суммирование осуществляется по всем значениям p, q, l, m при которых слагаемые не являются пренебрежимо малыми или равными нулю.

Подготовительная работа и процесс суммирования упрощаются, если функцию $h(r, t)$ можно представить в виде произведения:

$$h(r, t) = h_1(x) h_2(y) h_3(z) h_4(t) \quad (5.6)$$

В этом случае корреляционная функция может быть также представлена в виде произведения:

$$R(x, y, z, t) = R_1(x) R_2(y) R_3(z) R_4(t) \quad (5.7)$$

Это позволяет свести сложный процесс четырехкратного суммирования к повторному применению однократного скользящего суммирования.

Пример 5.1

Пусть импульсная переходная характеристика пространственного фильтра для формирования плоского скалярного поля имеет вид:

$$h(x, y) = e^{-((ax)^2 + (by)^2)} = e^{-(ax)^2} e^{-(by)^2}$$

Тогда, в соответствии с (5.5), получаем:

$$\begin{aligned} \xi[i, j] &= \Delta x \Delta y \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} e^{-(ax)^2} e^{-(by)^2} X_{\delta}[i - p, j - q] = \Delta x \Delta y \sum_{p=0}^{\infty} e^{-(ax)^2} \sum_{q=0}^{\infty} e^{-(by)^2} X_{\delta}[i - p, j - q] = \\ &= \Delta x \sum_{p=0}^{\infty} e^{-(ax)^2} \left(\Delta y \sum_{q=0}^{\infty} e^{-(by)^2} X_{\delta}[i - p, j - q] \right) \end{aligned}$$

Заменяем двукратное суммирование двумя однократными скользящими суммированиями:

$$\xi^1[i, j] = \Delta y \sum_{q=0}^{\infty} e^{-(by)^2} X_{\delta}[i, j - q]$$

$$\xi[i, j] = \Delta x \sum_{p=0}^{\infty} e^{-(ax)^2} \xi^1[i - p, j]$$

где:

$$x = p \Delta x$$

$$y = q \Delta y$$

Отметим, что при первом прохождении обеспечивается корреляция вдоль оси y , при втором – вдоль оси x .