

## Musterlösung zu Übung 1 zur Vorlesung Messtechnik I im SS 2006

Abgabe: KW 20, 19 Punkte

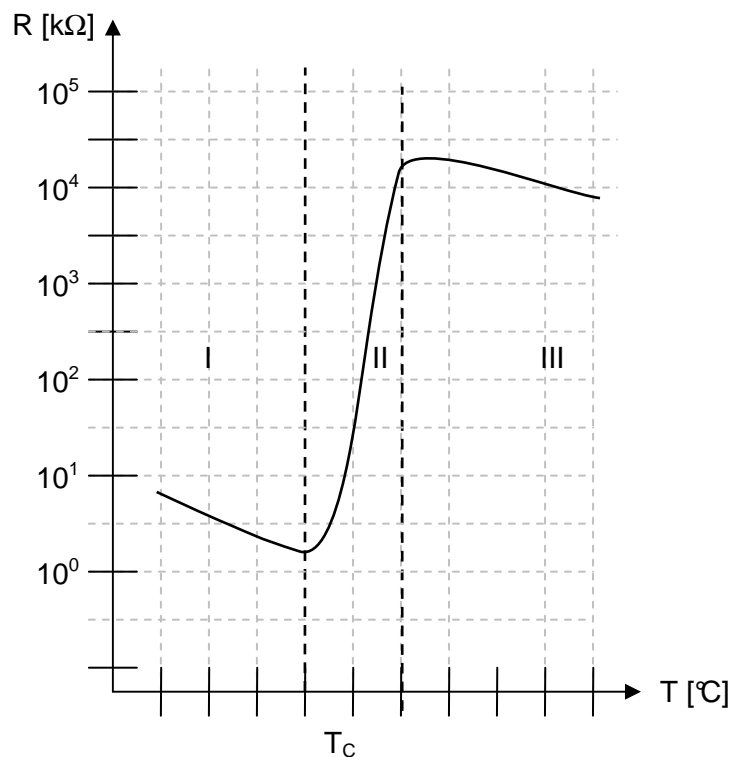
### Hausaufgabe 1: NTC und PTC

5 Punkte

Gegeben ist ein NTC mit folgenden Daten:  $B = 3600 \text{ K}$ ,  $R_{T_0} = R_{(20^\circ\text{C})} = 10 \text{ k}\Omega$ .

- (1P) Berechnen Sie den Widerstand bei  $80^\circ\text{C}$ !
- (1P) Berechnen Sie die Empfindlichkeit bei  $80^\circ\text{C}$ !
- (1P) Berechnen Sie den Temperaturkoeffizienten  $\beta$  bei  $20^\circ\text{C}$  und  $80^\circ\text{C}$ !

Unten sehen Sie die  $R(T)$ -Kennlinie eines PTC dargestellt:



- (1P) Erklären Sie den Verlauf der Kennlinie!
- (1P) Nennen Sie für Heiß- und Kaltleiter je eine weitere Anwendungsmöglichkeit außer der Messung der Temperatur und erklären Sie diese!

Musterlösung zu Hausaufgabe 1:

- $R = R_0 \cdot \exp\left(B \cdot \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right)\right) = 10000 \Omega \cdot \exp\left\{3600 \text{ K} \cdot \left(\frac{1}{353,15 \text{ K}} - \frac{1}{293,15 \text{ K}}\right)\right\} = 1241 \Omega$  1P
- $E = \frac{dR}{dT} = R_{(80^\circ\text{C})} \cdot \left(-\frac{B}{T^2}\right) = 1241 \Omega \cdot \left(-\frac{3600 \text{ K}}{(353,15)^2}\right) = -36 \frac{\Omega}{\text{K}}$  1P
- $\beta = \frac{1}{R} \cdot \frac{dR}{dT} = -\frac{B}{T^2} = -\frac{3022 \text{ K}}{(293,15 \text{ K})^2} = -0,042 \frac{1}{\text{K}}$  0,5P

$$-\frac{3022K}{(353,15K)^2} = -0,029 \frac{1}{K}$$

0,5P

- d) (1P) Im kalten Zustand ist der Widerstand des PTC relativ gering und zeigt das charakteristische Verhalten eines Halbleiters mit negativem Temperaturkoeffizient (I), bis zur der Curietemperatur. Dort löst sich die einheitliche Ausrichtung der Kristallite auf und es kommt zu einem sprunghaften Anstieg des Widerstandes mit steigender Temperatur (positiver Temperaturkoeffizient) (II). Im Bereich III dominiert wieder das Halbleiterverhalten. 1P
- e) (1P) Ein NTC kann als Einschaltstrombegrenzer zur Motorsteuerung genutzt werden. Zu Beginn ist der Widerstand hoch und es fließt wenig Strom, erst bei nach dem Einschwingen fließt wegen der Eigenerwärmung des NTC mehr Strom. Ein PTC kann als Überlastsicherung oder selbstregelndes Heizelement benutzt werden. Es wird bei konstanter Heizspannung betrieben, Erwärmt sich der PTC zu stark, steigt sein Widerstand stark an, wodurch der Stromfluss wieder reduziert wird. 1P

## Hausaufgabe 2: Metallwiderstands-Thermometer

7 Punkte

Zur Temperaturmessung einer Klimaanlage wird ein Pt-100 Metallwiderstandsthermometer verwendet. Der Zuleitungswiderstand beträgt mit Hin- und Rückleitung 2  $\Omega$ .

- a) (1P) Erklären Sie den Sensoreffekt bei Metallwiderstands-Thermometern!
- b) (3P) Mit einem Messgerät wird ein Widerstand von 110  $\Omega$  gemessen, welcher Temperatur in  $^{\circ}\text{C}$  entspricht dieser Wert? Wie groß ist der Messfehler, wenn man die Zuleitungswiderstände nicht berücksichtigt?
- c) (2P) Durch welche Messverfahren werden lange Zuleitungswiderstände messtechnisch kompensiert? Erklären Sie ein Verfahren und fertigen Sie dazu eine Skizze an.
- d) (1P) Warum darf die Verlustleistung, die während der Messung im Sensorelement entsteht nicht zu groß werden?

### Musterlösung zu Hausaufgabe 2:

- a) Mit zunehmender Temperatur wachsen die Wärmeschwingungen der Kristallgitterbausteine des Metalls. Dadurch verringert sich die mittlere freie Weglänge der Elektronen, wodurch ihre Beweglichkeit abnimmt und die Leitfähigkeit kleiner wird. 1P
- b) Berechnung der Temperatur:

$$R(\vartheta) = R_0 \cdot (1 + A\vartheta + B\vartheta^2)$$

$$\Leftrightarrow \vartheta^2 + \frac{A}{B}\vartheta - \frac{\left(\frac{R(\vartheta)}{R_0} - 1\right)}{B} = 0$$

1P

$$\Rightarrow \vartheta = -\frac{A}{2B} \pm \sqrt{\left(\frac{A}{2B}\right)^2 + \frac{\left(\frac{R(\vartheta)}{R_0} - 1\right)}{B}}$$

$$\vartheta = \frac{3,90802 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 0,5802 \cdot 10^{-6}} \pm \sqrt{\left( \frac{3,90802 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 0,5802 \cdot 10^{-6}} \right)^2 - \frac{\left( \frac{(110-2)\Omega}{100\Omega} - 1 \right)}{0,5802 \cdot 10^{-6}}}$$

$$\Rightarrow \vartheta = 20,5^\circ\text{C}$$

$$\text{mit } R_0 = 100\Omega$$

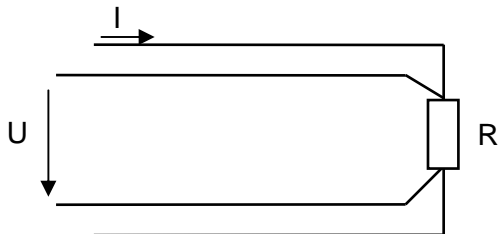
Ohne Berücksichtigung der Zuleitungswiderstände erhält man eine Temperatur von 25,7 °C, d.h. einen Messfehler von 25%!

1P

1P

- c) Das beste, aber auch teuerste Verfahren ist die sog. Vierpunktmessung, bei der jeweils für Stromzuführung und Spannungsmessung eigene Hin- und Rückleitungen verwendet werden. Die Spannungsmessung erfolgt nahezu verlustlos, während der Strom durch eigene Zuleitungen eingepreßt wird. Dadurch wird das Messergebnis nicht verfälscht.

1P



1P

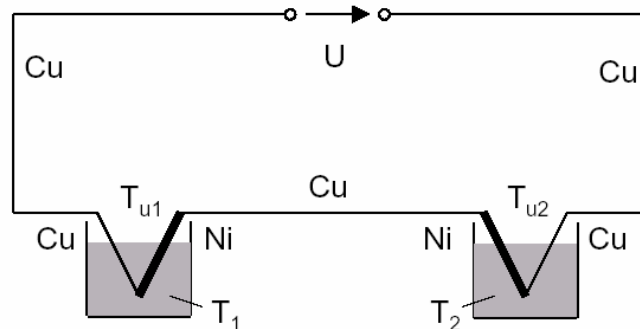
- d) Die im Temperaturfühler umgesetzte Leistung darf nicht zu groß werden, damit das Messergebnis nicht durch die Eigenerwärmung des Widerstandes verfälscht wird.

1P

### Hausaufgabe 3: Thermoelement

7 Punkte

Zur Messung der Differenztemperatur  $T_d$  zweier Flüssigkeiten werden zwei Thermoelemente entsprechend der Anordnung verwendet.  $T_1$  und  $T_2$  sind die Temperaturen der Flüssigkeiten,  $T_{u1}$  und  $T_{u2}$  die der Umgebung.



- (2P) Erklären Sie den Seebeck-Effekt.
- (2P) Bestimmen Sie den Zusammenhang  $U = f(T_d, T_{u1}, T_{u2}, k_{CuNi})$  mit  $T_d = T_1 - T_2$ .
- (1P) Wie groß ist allgemein die Empfindlichkeit  $E$  der Spannung  $U$  gegenüber der Differenztemperatur  $T_d$ ?
- (1P) Berechnen Sie die Spannung  $U$  des Thermoelementes, wenn  $T_1 = 50^\circ\text{C}$  und  $T_2 = 100^\circ\text{C}$  beträgt! Hinweis:  $k_{CuPt} = 0,7 \text{ mV}/100\text{K}$ ,  $k_{NiPt} = -1,9 \text{ mV}/100\text{K}$ ,  $T_{u1} = T_{u2}$ .
- (1P) Um welchen Wert  $\Delta U$  ändert sich  $U$ , wenn die Umgebungstemperatur  $T_{u1}$  um  $10^\circ\text{C}$  zunimmt?

### Musterlösung zu Hausaufgabe 3: Thermoelement

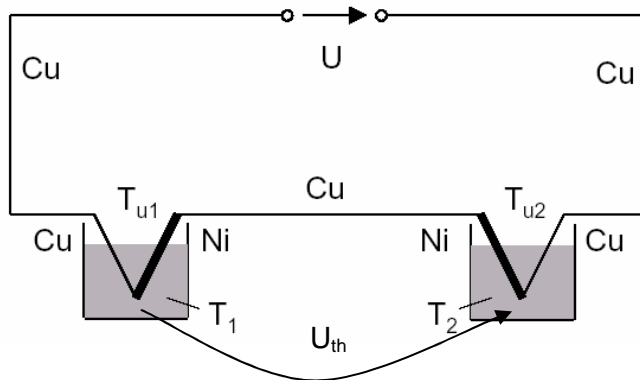
- a) Wenn die Verbindungsstelle zweier Leiter oder Halbleiter mit unterschiedlichen Seebeck-Koeffizienten erwärmt wird, entsteht zwischen den beiden Materialien eine thermoelektrische Spannung. Dieser Effekt wird als thermoelektrischer Effekt oder als Seebeck-Effekt bezeichnet. Es handelt sich um einen Volumendiffusionsdefekt. Am heißen Ende eines Thermoelektrischen Materials tritt aufgrund der dort höheren kinetischen Energie der Ladungsträger eine Verarmung an Ladungsträgern auf und am kalten Ende tritt eine Anreicherung an Ladungsträgern auf.

2P

b)

$$\begin{aligned} U_{th} &= k_{CuNi} \cdot T_1 + k_{NiCu} \cdot T_{U1} + k_{CuNi} \cdot T_{U2} + k_{NiCu} \cdot T_2 \\ &= k_{CuNi} \cdot (T_1 - T_2 - T_{U1} + T_{U2}) \\ &= k_{CuNi} \cdot (T_d - T_{U1} + T_{U2}) \end{aligned}$$

2P



c)

$$E = \frac{dU}{dT_d} = k_{CuNi}$$

1P

d)

$$T_{U1} = T_{U2}$$

$$U_{th} = k_{CuNi} \cdot (T_1 - T_2) = (k_{CuPt} - k_{NiPt}) \cdot (T_1 - T_2) = 2,6 \frac{mV}{100K} \cdot (-50K) = -1,3mV$$

1P

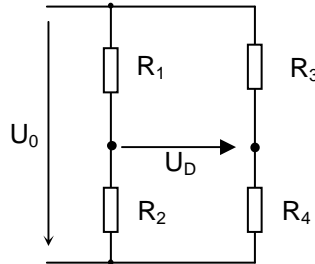
e)  $U_{th}^I = k_{CuNi} \cdot (T_1 - T_2 - (T_{U1} + 10K) + T_{U2}) = k_{CuNi} \cdot (50K - 100K - 10K) = -1,56mV = U_{th} + \Delta U$

$$\Rightarrow \Delta U = k_{CuNi} \cdot (-10K) = -2,6 \frac{mV}{100K} \cdot 10K = -0,26mV$$

1P

## Sonderaufgabe 1: Brückenschaltung

Viele Sensoren ändern ihren elektrischen Widerstand in Abhängigkeit von der Messgröße. Um diesen Effekt messtechnisch umsetzen zu können, wird oft auf die sog. Brückenschaltung zurückgegriffen, die aus vier Widerständen besteht, von denen einer (Viertel-), zwei (Halb-) oder alle vier (Vollbrücke) variabel sind. Die Skizze stellt eine solche Brückenschaltung dar.



- Berechnen Sie die Brückendiagonalspannung  $U_D$  in Abhängigkeit von  $U_0$  und  $R_1$  bis  $R_4$ !
- Wie lautet die sog. Abgleichbedingung, d.h. in welchem Verhältnis müssen die Widerstände zueinander stehen, damit die Brückendiagonalspannung  $U_D = 0$  V beträgt?
- Berechnen Sie die Brückendiagonalspannung, wenn alle vier Widerstände den gleichen Grundwert haben, aber ein Widerstand sich variabel mit der Messgröße ändert, d.h. für  $R_1 = R_2 = R_3 = R_0$  und  $R_4 = R_0 + \Delta R$ !

### Musterlösung zu Sonderaufgabe 1:

- Berechnung der Brückendiagonalspannung:

$$U_D = U_0 \left( \frac{R_2}{R_1 + R_2} - \frac{R_4}{R_3 + R_4} \right)$$

- Abgleichbedingung:

$$\begin{aligned} U_D \stackrel{!}{=} 0 &\Rightarrow U_0 \left( \frac{R_2}{R_1 + R_2} - \frac{R_4}{R_3 + R_4} \right) = 0 \Rightarrow \left( \frac{R_2}{R_1 + R_2} - \frac{R_4}{R_3 + R_4} \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow R_2 R_3 + R_2 R_4 = R_1 R_4 + R_2 R_4 \Leftrightarrow R_2 R_3 = R_1 R_4 \end{aligned}$$

- Berechnung:

$$\begin{aligned} U_D &= U_0 \left( \frac{R_0}{2R_0} - \frac{R_0 + \Delta R}{2R_0 + \Delta R} \right) = U_0 \left( \frac{2R_0^2 + R_0 \Delta R - 2R_0^2 - 2R_0 \Delta R}{4R_0^2 + 2R_0 \Delta R} \right) \\ &= -U_0 \left( \frac{\Delta R}{4R_0 + 2\Delta R} \right) \stackrel{\text{für } |\Delta R| \ll R_0}{=} -\frac{1}{4} U_0 \frac{\Delta R}{R_0} \text{ daher der Name „Viertelbrücke“!} \end{aligned}$$

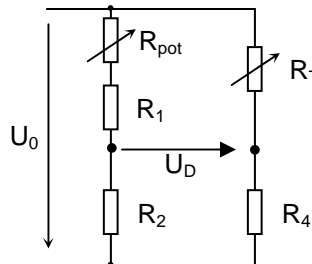
## Sonderaufgabe 2: Metallwiderstands-Thermometer

Zur Temperaturregelung eines Brutschrankes (Solltemperatur:  $38,6^\circ\text{C}$ ) soll ein Pt-1000-Widerstandsthermometer  $R_T$  eingesetzt werden, das mit Hilfe einer Brückenschaltung ausgelesen wird. Folgende Daten sind bekannt:

$$R_1 = 10000\Omega$$

$$R_2 = 11500\Omega$$

$$R_3 = 1150\Omega$$



- Auf welchen Wert muss der variable Widerstand  $R_{\text{pot}}$  eingestellt werden ( $R_{\text{pot}} \geq 0\Omega$ ), damit die Brücke bei der Solltemperatur abgeglichen ist?
- Wie groß darf die Brückenspannung  $U_0$  maximal sein, wenn im Temperaturfühler nicht mehr als 2 mW elektrische Leistung umgesetzt werden soll? Warum darf diese Leistung nicht zu groß werden?
- Die Brücke wird nun mit einer Spannung von  $U_0 = 2\text{ V}$  betrieben, die Diagonalspannung wird auf einen Komparator (spannungsabhängiger Umschalter) gegeben, mit dem ein Heizelement geschaltet wird. Dieser Komparator hat eine Schalthysterese von  $\pm 1\text{ mV}$ , d.h. das Heizelement wird bei einer Brückendiagonalspannung von  $-1\text{ mV}$  eingeschaltet und erst wieder bei  $U_D = +1\text{ mV}$  ausgeschaltet. Wie stark schwankt dadurch die Temperatur des Brutschrankes, wenn andere Einflüsse vernachlässigt werden können?

### Musterlösung zu Sonderaufgabe 2:

- Die Brücke ist bei  $38,6^\circ\text{C}$  abgeglichen, wenn gilt:

$$\frac{R_1 + R_{\text{pot}}}{R_2} = \frac{R_T}{R_4} \Leftrightarrow R_{\text{pot}} = \frac{R_2}{R_4} R_T(38,6^\circ\text{C}) - R_1 \quad 1\text{P}$$

Für den Pt-1000 gilt:

$$R(\vartheta) = R_0 \cdot (1 + 3,90802 \cdot 10^{-3} \vartheta - 0,5802 \cdot 10^{-6} \vartheta^2) \quad \text{mit } R_0 = 1000\Omega \quad 1\text{P}$$

also:  $R_T(38,6^\circ\text{C}) = 1150,0\Omega$  und damit  $R_{\text{pot}} = 1.500\Omega$ . 1P

- Der am Temperaturfühler abfallende Spannung  $U_T$  berechnet sich aus dem Spannungsteiler mit  $R_4$ , der Strom aus dem Gesamtwiderstand:

$$U_T = U_0 \cdot \frac{R_T}{R_T + R_4} \quad I_T = \frac{U_0}{R_T + R_4} \quad 1\text{P}+1\text{P}$$

Die maximal zulässige Brückenspannung ergibt sich aus der maximalen Leistung:

$$P_T = U_T \cdot I_T \left( = \frac{U_T^2}{R_T} = R_T \cdot I_T^2 \right) = U_0^2 \cdot \frac{R_T}{(R_T + R_4)^2} \Rightarrow U_{0\text{max}} = \sqrt{\frac{P_{T\text{max}}}{R_T}} (R_T + R_4) = 3,03\text{ V} \quad 2\text{P}$$

Die im Temperaturfühler umgesetzte Leistung darf nicht zu groß werden, damit das Messergebnis nicht durch die Eigenerwärmung des Widerstandes verfälscht wird.

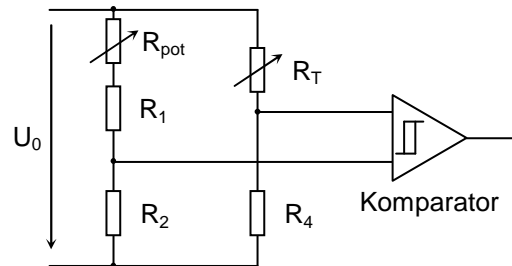
- c) Um die Temperaturschwankung zu berechnen, muss bestimmt werden, bei welchen Temperaturen die Brücke eine Spannung von +1 mV bzw. -1 mV liefert. Berechne dazu zunächst die Empfindlichkeit der Anordnung. Beachte: Viertelbrücke mit Arbeitspunkt bei  $\vartheta = 38,6^\circ\text{C}$ .

$$S_{\text{Brücke}} = \frac{\partial U}{\partial \vartheta} = \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \frac{1}{4} U_0 \frac{\Delta R}{R_0} \right) = \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \frac{1}{4} U_0 \frac{R_0 \cdot (\alpha \cdot \vartheta + \beta \cdot \vartheta^2)}{R_0} \right) = \frac{1}{4} U_0 (\alpha + 2\beta\vartheta) = 1,93 \frac{\text{mV}}{\text{K}}$$

2P

$$\text{Also ergibt sich: } \pm \Delta \vartheta = \frac{\pm \Delta U_{\text{max}}}{S_{\text{Brücke}}} = \pm 0,52 \text{ K}$$

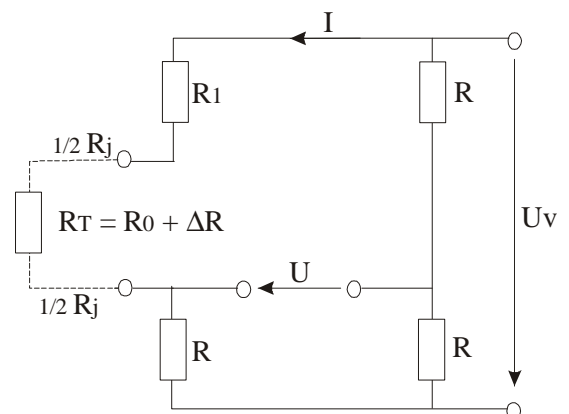
1P



1P

### Sonderaufgabe 3: Metall-Widerstandsthermometer

Für den Aufbau einer Temperaturmessstelle wird ein Pt-100-Widerstandsthermometer in Zweileiter-schaltung verwendet. Der Messbereich beträgt  $150^\circ\text{C}$  bis  $200^\circ\text{C}$ , die Zuleitungen zum Thermometer haben einen Widerstand von insgesamt  $R_j = 10 \Omega$ , die Brückenversorgungsspannung beträgt  $U_v = 5 \text{ V}$ . In dem Schaltplan rechts ist die genaue Verdrahtung zu sehen.



- Dimensionieren Sie die Widerstände so, dass am Messbereichsanfang der Strom durch das Widerstandsthermometer  $I_0 = 2 \text{ mA}$  beträgt.
- Bestimmen Sie die Gleichung für die Brückenausgangsspannung  $U$  in Abhängigkeit von der Temperatur der Messstelle.
- Die Zuleitungswiderstände erhöhen sich aufgrund äußerer Einflüsse auf  $R_j = 11 \Omega$ . Ermitteln Sie den relativen Fehler am Messbereichsanfang bezogen auf den Messbereichsendwert.

#### Musterlösung zu Sonderaufgabe 3:

- $T = 150^\circ\text{C} \rightarrow R_{T150} = 157,31 \Omega$   
 $T = 200^\circ\text{C} \rightarrow R_{T200} = 175,84 \Omega$
- Dimensionierung der Widerstände:

$$U = \frac{U_V}{2} - R \cdot I \quad (1)$$

$$R_1 + R_j + R_0 + \Delta R + R = \frac{U_V}{I} \quad (2)$$

Messbereichsanfang:  $\Delta R = 0$ ,  $U = 0$ ,  $I = I_0$

$$R_0 = R_{T150} = 157,31\Omega$$

aus (1):  $R = \frac{U_V}{2I_0} = \frac{5V}{4mA} = 1,25k\Omega$ ,

aus (1) & (2):  $R_1 = R - R_j - R_0 = 1,25k\Omega - 10\Omega - 157,31\Omega = 1,08269k\Omega \quad (3)$

$$U = f(\Delta R)$$

aus (2) & (3):  $I = \frac{U_V}{2R + \Delta R} \quad (4)$

(4) in (1):  $U = \frac{U_V}{2} - \frac{R \cdot U_V}{2R + \Delta R} = \frac{2R + \Delta R - 2R}{4R + 2\Delta R} \cdot U_V = \frac{\Delta R}{5k\Omega + 2\Delta R} \cdot 5V$

c)

Fehler am Messbereichsanfang bei  $R_1 = 11\Omega$

Messbereichsanfang:

$$R_1 = 10\Omega : \quad U = U_A = 0$$

$$R_1 = 11\Omega : \quad U'_A = \frac{1\Omega}{5k\Omega + 2 \cdot 1\Omega} \cdot U_V = 0,9996mV \approx 1mV$$

Messbereichsende:

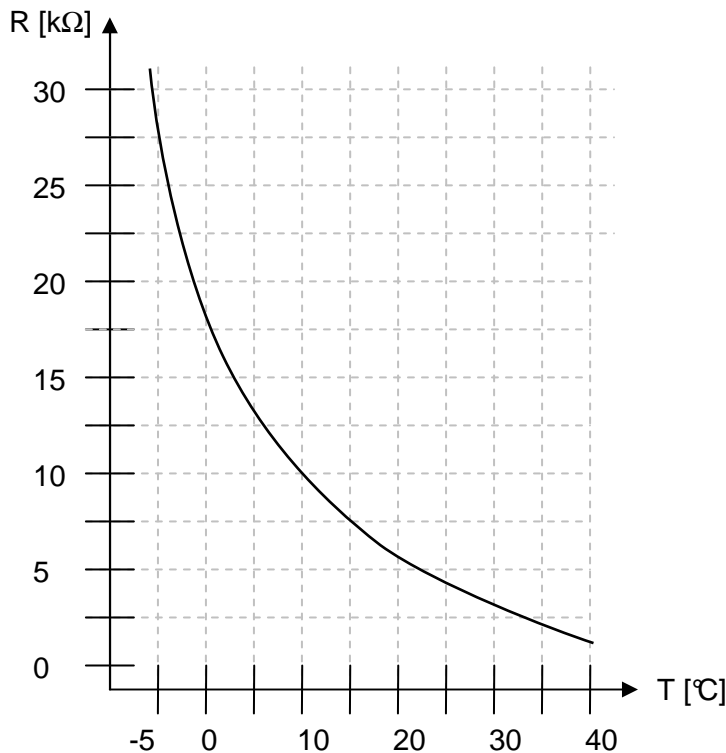
$$R_1 = 10\Omega : \quad U = U_E = \frac{R_{T200} - R_{T150}}{5k\Omega + 2 \cdot (R_{T200} - R_{T150})} \cdot U_V = \frac{18,53}{5k + 37,06} \cdot 5V = 18,39mV$$

$$F_{rel} = \frac{U'_A - U_A}{U_E - U_A} = \frac{1mV}{18,39mV} = 5,44\%$$



## Sonderaufgabe 4: Temperatursensor

In der Abbildung ist eine  $R(T)$ -Kennlinie eines berührenden Temperatursensors gezeigt.



- Um welchen Sensortyp handelt es sich?
- Geben Sie eine physikalische Begründung für den Temperaturkoeffizienten des Widerstandes des Sensors!
- Berechnen Sie den Temperaturkoeffizienten  $\beta = \frac{1}{R(T)} \cdot \frac{dR}{dT}$ !
- Stellen sie den Temperaturkoeffizienten als Funktion der Temperatur in °C im Bereich von -5°C bis 40°C graphisch dar!

---

### Musterlösung zu Sonderaufgabe 4:

---

- Thermistor, NTC 1P
- NTC sind Halbleiter, d.h. die Ladungsträger sind Elektronen und lokalisiert an Atomen. Der Ladungstransport erfolgt durch thermisch angeregte „Sprünge“ der Elektronen. Diese Sprünge benötigen Energie, die bei hoher Temperatur leichter verfügbar ist => erhöhte Leitfähigkeit bei erhöhter Temperatur. 1P
- Eliminierung von  $R(T)|_{T=\infty}$  durch Einsetzen zweier Punkte  $(R_1, T_1)$ ,  $(R_2, T_2)$  der Kennlinie und auflösen nach B: 1P

$$R(T) = R(T)|_{T=\infty} \cdot \exp\left(\frac{B}{T}\right) \quad 1P$$

$$\Rightarrow B = (\ln R_1 - \ln R_2) \cdot \frac{T_1 \cdot T_2}{T_2 - T_1} = (\ln 27500\Omega - \ln 7500\Omega) \cdot \frac{268,15K \cdot 288,15K}{288,15K - 268,15K} = 5022K$$

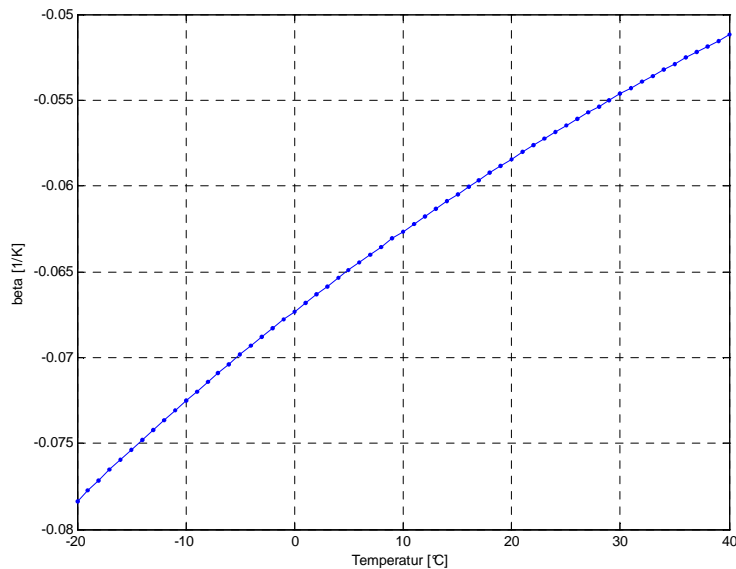
1P

$$\beta = \frac{1}{R(T)} \cdot \frac{dR}{dT} = -\frac{B}{T^2}$$

$$\beta = -\frac{5022K}{T^2}$$

1P

d) Graph:



1 P

### Sonderaufgabe 5: Temperaturmessung mit Heißeiter

Ein NTC-Temperaturfühler soll im medizinischen Bereich eingesetzt werden (Temperaturbereich 36°C bis 45°C). Die Temperaturabhängigkeit des Fühlers wird durch folgende Gleichung beschrieben:

$$R_T = R_{T_0} \cdot \exp\left(B \cdot \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right)\right)$$

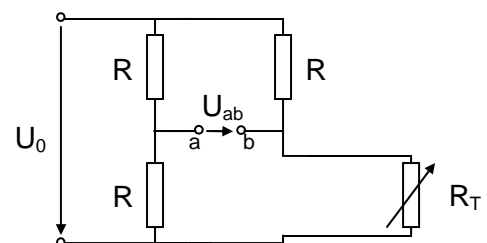
Mit  $R_{T_0} = 10,0k\Omega$  bei  $T_0 = 273K$  und  $B = 4052K$

Der Temperaturfühler ist in nebenstehender Brückenschaltung ( $U_0 = 10V$ ) eingebaut.

a) Welchen Wert müssen die Widerstände  $R$  haben, damit die Brücke bei 36°C abgeglichen ist?

b) Geben Sie die Leerlaufspannung  $U_{d0}$  der Brückendiagonale in Abhängigkeit von  $R_T$ ,  $U_0$  und  $R$  an.

c) Berechnen Sie die Empfindlichkeit der Messanordnung allgemein und für  $T=36^\circ C$ . (Die Empfindlichkeit ist definiert als die Änderung der Ausgangsgröße dividiert durch die Änderung der Eingangsgröße.) Wie verhält sich die Empfindlichkeit bei unterschiedlichen Messtemperaturen?



- a) Die Abgleichbedingung liefert:

$$\frac{R}{R} = \frac{R}{R_T(36^\circ\text{C})} \Rightarrow R = R_T(36^\circ\text{C})$$

$$R_T(36^\circ\text{C}) = 10\text{k}\Omega \cdot \exp\left(4052\text{K}\left(\frac{1}{273\text{K} + 36\text{K}} - \frac{1}{273\text{K}}\right)\right) = 1774,223\Omega \approx 1,77\text{k}\Omega$$

- b) Die Spannung der Brückendiagonale errechnet sich zu:

$$U_{ab} = \left(\frac{R}{2R} - \frac{R_T}{R + R_T}\right) \cdot U_0 = \left(\frac{1}{2} - \frac{R_T}{R + R_T}\right) \cdot U_0 = \frac{R - R_T}{2 \cdot (R + R_T)} U_0$$

- c) Empfindlichkeit ist definiert als Änderung der Ausgangsgröße / Änderung der Eingangsgröße. Also hier:

$$k = \frac{dU_{ab}}{dT}$$

Ausgangspunkt der Ableitung ist hier:

$$U_{ab} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1 + \frac{R}{R_T}}\right) \cdot U_0$$

Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} k = \frac{dU_{ab}}{dT} &= -\frac{B \cdot R \cdot R_T}{T^2 \cdot (R + R_T)^2} \cdot U_0 \\ &= \frac{4052\text{K} \cdot 1,7\text{k}\Omega \cdot 1,7\text{k}\Omega}{(273\text{K} + 36\text{K})^2 (3,4\text{k}\Omega)^2} \cdot 10\text{V} = 0,106094 \frac{\text{V}}{\text{K}} \approx 0,11 \frac{\text{V}}{\text{K}} \end{aligned}$$

Die Empfindlichkeit ist also entsprechend obiger Gleichung temperaturabhängig.

## Musterlösung zu Übung 2 zur Vorlesung Messtechnik I im SS 2006

Abgabe: KW 22, 21 Punkte

### Hausaufgabe 1: Strahlungsgesetz und Thermopile

5 Punkte

- (1P) Was beschreibt das Plancksche Strahlungsgesetz und in welchem Zusammenhang dazu steht das Wiensche Verschiebungsgesetz? Drücken Sie die Zusammenhänge auch in Formeln aus!
- (1P) Ein Strahlungssensor sollte im Idealfall eine hohe Empfindlichkeit haben und ein schnelles Ansprechverhalten zeigen. Wieso ist das in der Praxis nicht möglich?
- (1P) Thermoelemente haben im Vergleich zu Metallwiderstandsthermometern eine relativ geringe Empfindlichkeit, warum werden sie trotzdem für Strahlungssensoren verwendet? Wie kann man die Empfindlichkeit erhöhen?
- (1P) Wodurch ist die Detektivität des Thermopiles begrenzt? Welchen Einfluss haben die geometrischen Abmessungen der Thermoschenkel hierauf?
- (1P) Welches Verhältnis besteht zwischen der Empfindlichkeit eines Strahlungsthermoelementes und der Empfindlichkeit einer Strahlungsthermosäule, wenn die Wärmeleitung durch die Thermoschenkel dominiert wird?

### Musterlösung

- Das Plancksche Strahlungsgesetz beschreibt die Abhängigkeit der spektralen Strahldichte eines

Schwarzstrahlers von der Temperatur und der Wellenlänge: 
$$M_{\lambda T} = \frac{2 \cdot \pi \cdot h \cdot c^2}{\lambda^5 \cdot \left( e^{\frac{hc}{\lambda T}} - 1 \right)}$$

Wird das Plancksche Strahlungsgesetz nach der Wellenlänge abgeleitet und Null gesetzt, erhält man den Zusammenhang zwischen der Temperatur und der Wellenlänge, bei der die Ausstrahlung ein Maximum hat. Das Wiensche Verschiebungsgesetz gibt diesen Zusammenhang an:  
$$\lambda_{\max} \cdot T = 2896 \mu\text{m} \cdot K$$

1P

- Bei gleich bleibender Einstrahlung ist die Temperaturdifferenz, und damit die Empfindlichkeit vom thermischen Widerstand abhängig ( $\Delta T = R_{th} \cdot \Phi$ ). Eine hohe Empfindlichkeit fordert einen hohen thermischen Widerstand. Die thermische Zeitkonstante ist jedoch ebenfalls proportional zum thermischen Widerstand ( $\tau = R_{th} \cdot C_{th}$ ), weshalb in der Praxis ein Kompromiss zwischen hoher Empfindlichkeit und schneller Messung eingegangen wird.

1P

- Für den Strahlungsfluss von einem Sender zu einem Empfänger gilt:

$$\Phi = \sigma \cdot \frac{A_S \cdot A_E}{\pi \cdot a^2} \cdot (T_S^4 - T_E^4)$$
 Thermoelemente messen direkt die Temperaturdifferenz und eignen sich deshalb für Strahlungssensoren. Außerdem haben Thermoelemente eine höhere Detektivität als Metallwiderstandsthermometer. Zur Erhöhung der Empfindlichkeit werden mehrere Thermoelemente in Serie miteinander verschaltet.

1P

- Die Detektivität ist durch das thermische Widerstandsrauschen in den Thermoschenkeln begrenzt:  
$$\tilde{u}_{\text{Rauschen}} = \sqrt{4 \cdot k \cdot T \cdot R_{el} \cdot \Delta f}$$
 Hierbei ist die Rauschspannung proportional zu dem elektrischen Widerstand. Dieser wird wiederum durch die Länge und den Querschnitt der Thermoschenkel

bestimmt. Für eine möglichst kleine Rauschspannung sollten die Thermoschenkel möglichst kurz bei einem großen Querschnitt sein ( $R = \rho \cdot \frac{l}{A}$ ). Dadurch sinken allerdings gleichzeitig der thermische Widerstand und damit die Empfindlichkeit sowie auch die Detektivität. In der Praxis ist somit ein Kompromiss zu suchen, der eine insgesamt optimale Detektivität gewährleistet.

1P

- e) Die Empfindlichkeit eines einzelnen Thermoelementes und eines Thermopiles ist annähernd gleich. Die elektrische Reihenschaltung der einzelnen Thermoelemente wird durch die thermische Parallelschaltung der Einzelleitwerte praktisch kompensiert, wenn man davon ausgeht, dass der Wärmeleitwert durch die Metallschenkel der Thermoelemente bestimmt wird:

$$S_{\text{Thermoelement}} = \frac{(\alpha_A - \alpha_B)}{G_{\text{th,einzel}}}$$

$$S_{\text{Thermopile}} = \frac{n \cdot (\alpha_A - \alpha_B)}{G_{\text{th}}} \text{ mit } G_{\text{th}} = \cancel{G_{L_{\text{Gas}}}} + \cancel{G_{\text{Str}}} + \cancel{G_{L_{\text{Mem}}}} + n \cdot (G_{L_A} + G_{L_B}) = n \cdot (G_{L_A} + G_{L_B}) = n \cdot G_{\text{th,einzel}}$$

$$\Rightarrow S_{\text{Thermopile}} = \frac{n \cdot (\alpha_A - \alpha_B)}{n \cdot G_{\text{th,einzel}}} = S_{\text{Thermoelement}}$$

1P

## Hausaufgabe 2: Thermopile

5 Punkte

Die kreisförmige Empfängerfläche eines Strahlungssensors hat einen Durchmesser von  $d = 1,5 \text{ mm}$ , die Empfindlichkeit der Membrananordnung beträgt  $S_{\text{Membran}} = 12 \text{ K/mW}$ . Zur Messung der eingestrahnten Leistung werden insgesamt 40 Bi/Sb Thermoelemente in Reihe geschaltet. Der Sensor hat einen Erfassungswinkel von  $\varphi = 15^\circ$ .

(5P) Mit diesem Sensor soll bei einer Umgebungstemperatur von  $15^\circ\text{C}$  die Temperatur einer Heizplatte (schwarzer Strahler, Radius  $15 \text{ cm}$ ) aus einer Entfernung von  $1 \text{ m}$  erfasst werden. Welches Signal erhält man bei einer Temperatur der Heizplatte von  $200^\circ\text{C}$ ? Wie groß ist die Empfindlichkeit der Anordnung bei dieser Heizplattentemperatur?

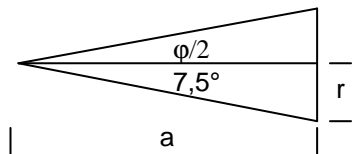
### Musterlösung zu Hausaufgabe 2: Thermopile

Berechnung der Strahlungsleistung, die auf die Fläche  $A_{\text{Empfänger}}$  (Temperatur  $T_{\text{Empfänger}}$  in K) von der im Abstand  $a$  befindlichen Fläche  $A_{\text{Sender}}$  (Temperatur  $T_{\text{Sender}}$  in K):

$$\Phi = \sigma \cdot \frac{A_{\text{Sender}} \cdot A_{\text{Empfänger}}}{\pi \cdot a^2} \cdot (T_{\text{Sender}}^4 - T_{\text{Empfänger}}^4) \text{ mit } \sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4 \text{ (Stefan-Boltzmann-Konst.)}$$

1P

Hier muss beachtet werden: der Sensor erfasst lediglich einen Raumwinkel von  $15^\circ$ , d.h. bei einer Entfernung von  $1 \text{ m}$  „sieht“ er nur eine Teilfläche der Heizplatte von (siehe Skizze):



$$r = a \cdot \tan \frac{\varphi}{2} = 1 \cdot \tan \frac{15^\circ}{2} = 13,2 \text{ cm}$$

1P

$$A_{\text{Sender}} = \pi r^2 = \pi \cdot (13,2 \text{ cm})^2 = 5,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$$

Mit der gegebenen Empfindlichkeit  $S_{\text{Membran}}$  ergibt sich für die Signalspannung in Abhängigkeit von der eingestrahnten Leistung (mit  $n$ : Anzahl der Thermoelemente):

$$\begin{aligned}
 U_{\text{Signal}} &= n \cdot \alpha \cdot S_{\text{Membran}} \cdot \Phi = n \cdot \alpha \cdot S_{\text{Membran}} \cdot \sigma \cdot \frac{A_1 \cdot A_2}{\pi a^2} \cdot (T_{\text{Heizplatte}}^4 - T_{\text{Umgebung}}^4) \\
 &= n \cdot \alpha \cdot S_{\text{Membran}} \cdot \sigma \cdot \frac{\pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot \pi a^2 \cdot \left(\tan \frac{\varphi}{2}\right)^2}{\pi a^2} \cdot (T_{\text{Heizplatte}}^4 - T_{\text{Umgebung}}^4) \\
 &= n \cdot \alpha \cdot S_{\text{Membran}} \cdot \sigma \cdot \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot \left(\tan \frac{\varphi}{2}\right)^2 \cdot (T_{\text{Heizplatte}}^4 - T_{\text{Umgebung}}^4) \\
 &= 40 \cdot 100 \frac{\mu\text{V}}{\text{K}} \cdot 12 \frac{\text{K}}{\text{mW}} \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4} \cdot \pi \cdot (0,75 \cdot 10^{-3} \text{m})^2 \cdot \left(\tan \frac{15}{2}\right)^2 \cdot ((473\text{K})^4 - (288\text{K})^4) \\
 &= 3,6 \text{mV}
 \end{aligned}$$

2P

(Anmerkung: Man erkennt, dass durch die Optik mit dem eingeschränkten Sichtfeld des Sensors eine Entfernungs-unabhängige Messung der Temperatur ermöglicht wird, so lange der Sender das Sichtfeld des Empfängers voll ausfüllt.)

Für die Empfindlichkeit der Anordnung gilt:

$$\begin{aligned}
 S_{\text{Sensor}} &= \frac{\partial U_{\text{Signal}}}{\partial T_{\text{Heizplatte}}} = n \cdot \alpha \cdot S_{\text{Membran}} \cdot \sigma \cdot \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot \left(\tan \frac{\varphi}{2}\right)^2 \cdot \frac{\partial}{\partial T_{\text{Heizplatte}}} (T_{\text{Heizplatte}}^4 - T_{\text{Umgebung}}^4) \\
 &= n \cdot \alpha \cdot S_{\text{Membran}} \cdot \sigma \cdot \pi \cdot d^2 \cdot \left(\tan \frac{\varphi}{2}\right)^2 \cdot T_{\text{Heizplatte}}^3 \\
 &= 40 \cdot 100 \frac{\mu\text{V}}{\text{K}} \cdot 12 \frac{\text{K}}{\text{mW}} \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4} \cdot \pi \cdot (1,5 \cdot 10^{-3} \text{m})^2 \cdot \left(\tan \frac{15}{2}\right)^2 \cdot (473\text{K})^3 = 35,3 \frac{\mu\text{V}}{\text{K}}
 \end{aligned}$$

2P

### Hausaufgabe 3: Pyroelektrischer Effekt

5 Punkte

Ein Bewegungsmelder (passiver Infrarotalarmgeber) soll mit einem thermischen Strahlungssensor betrieben werden.

- (1P) Erklären Sie den pyroelektrischen Effekt mit eigenen Worten!
- (2P) Skizzieren Sie den Verlauf der Signalspannungen pyroelektrischer und thermoelektrischer Strahlungssensoren, wenn der einfallende infrarote Strahlungsfluss rechteckförmig moduliert wird. Welcher der beiden Sensoren ist für einen Bewegungsmelder besser geeignet? Begründung!
- (2P) Bis zu welcher Entfernung kann ein Mensch (Abstrahlfläche  $\sim 0,5 \text{ m}^2$ ) bei  $20^\circ\text{C}$  Umgebungstemperatur erkannt werden, wenn ein pyroelektrischer Sensor mit einer Empfindlichkeit von  $5000 \text{ V/W}$  und einem Empfängerflächendurchmesser von  $0,5 \text{ mm}$  verwendet wird und der nach geschaltete Detektor ein Spannungssignal von  $10 \mu\text{V}$  anzeigen kann?

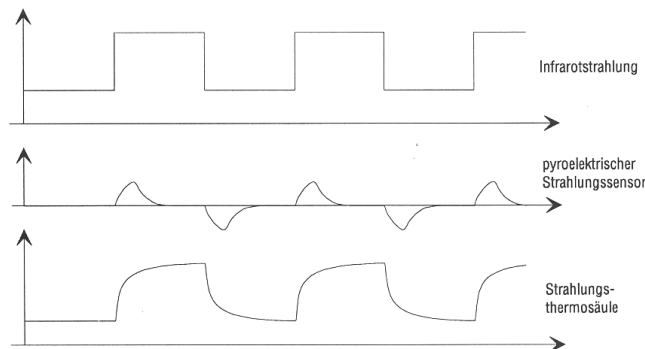
### Musterlösung:

- In Nichtleitern existieren keine freien Ladungen. Durch Strahlungseinfall kommt es in bestimmten ferroelektrischen Materialien durch Temperaturänderung zu einer spontanen Polarisierung, einer

Ladungsverschiebung der festen Elementarladungen im atomaren oder molekularen Bereich. Dies führt zu einer messbaren Änderung der Oberflächenladung.

1P

b) Skizze:



Quelle: Elbel, S.157

1P

Prinzipiell erfassen Pyrometer nur Temperaturänderungen (durch den bei der Polarisationsänderung fließenden Strom), thermoelektrische Strahlungssensoren erfassen die Temperatur absolut. Daher eignen sich pyroelektrische Sensoren zum Erkennen bewegter Wärmequellen.

1P

c)

Für die Empfindlichkeit gilt:

$$S = \frac{U}{\Phi} \left[ \frac{V}{W} \right]$$

Zur Entstehung von 10  $\mu V$  Signalspannung müssen demnach  $2 \cdot 10^{-9} W$  Strahlungsleistung eingestrahlt werden. Unter der Annahme einer Sensortemperatur von  $20^\circ C$ , einer Körpertemperatur von  $37^\circ C$  und einer abstrahlenden Fläche von  $0,5 m^2$  erhält man durch Auflösen der Gleichung:

$$\frac{U}{S} = \Phi = \frac{\sigma \cdot A_1 \cdot A_2}{\pi \cdot a^2} (T_1^4 - T_2^4)$$

$$a^2 = \frac{\sigma \cdot A_1 \cdot A_2}{\pi \cdot \Phi} (T_1^4 - T_2^4) = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4} \frac{0,5 m^2 \cdot \left( \frac{0,5 \cdot 10^{-3} m}{2} \right)^2}{2 \cdot 10^{-9} W} (310^4 - 293^4) K^4 = 1652 m^2$$

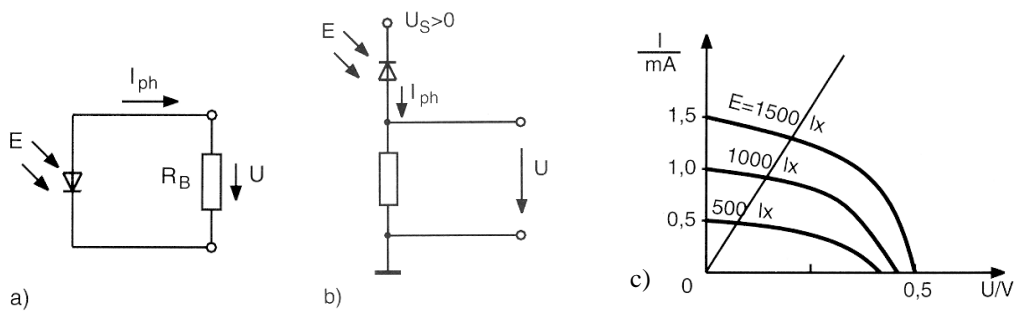
$$\Rightarrow a = 40,6 m$$

2P

## Hausaufgabe 4: Grundlagen Quantendetektoren

6 Punkte

- (2P) Erklären Sie den inneren Photoeffekt am Beispiel des pn-Übergangs einer Photodiode! Was unterscheidet den inneren von dem äußeren Photoeffekt?
- (4P) Im folgenden Bild sehen Sie zwei Möglichkeiten der Beschaltung einer Photodiode. Ordnen Sie die Bilder den Betriebsarten „Photoconductive“ und „Photovoltaic“ zu und erklären Sie die Begriffe! Geben Sie an, für welchen technischen Einsatz welche Betriebsart zu bevorzugen ist! Welche Schaltung passt zu der Lastgeraden im Kennlinienbild c)? Begründung!



## Musterlösung:

- a) Grundprinzip: Absorption von Lichtquanten im Material:

Energieübertragung auf Elektron  $\Rightarrow$  Anregung

Innerer Fotoeffekt (in Halbleitern): Elektron wird aus Valenzband ins Leitungsband angeregt

In der an freien Ladungsträgern verarmten Raumladungszone des pn-Überganges findet die durch Lichtquanten angeregte Erzeugung eines Elektron-Loch-Paares statt. Die Ladungen werden getrennt. Dadurch verkleinert sich die Raumladungszone und im Bändermodell verschieben sich die Fermienergien von p- und n-HL, was als spannungserzeugender Effekt an den Elektroden der Photodiode messbar ist. (Prinzip der Solarzelle)

1P

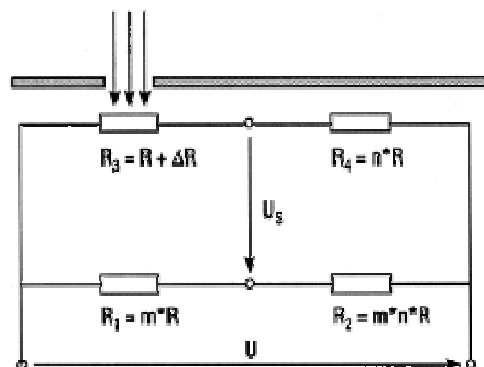
Äußerer Fotoeffekt: Elektron wird aus Material herausgeschlagen ins Vakuum, Einsatz in der Fotozelle. 1P

- b) Schaltung a) stellt den Photovoltaic - Betriebsmodus einer Photodiode dar. Die Diode wird als Spannungsquelle eingesetzt und liefert an dem Lastwiderstand den Photostrom  $I_{ph}$ . Deshalb passt diese Schaltung zu dem Kennlinienbild c). Die Schaltung hat die höchste Detektivität und wird deshalb in der Sensorik angewendet. 1+1P

Schaltung b) stellt den Photoconductive - Betriebsmodus dar. Die Diode wird mit einer Vorspannung in Sperrrichtung als Photoleiter betrieben. Ohne Beleuchtung ist an der Diode ein maximaler Spannungsabfall und die Spannung  $U$  am Lastwiderstand ist  $U = 0 \text{ V}$ . Mit zunehmender Beleuchtung steigt nun die Spannung  $U$  ab einem Schwellenwert, der abhängig von  $U_S$  ist, an und ist ein Maß für die Beleuchtungsstärke. Durch die Vorspannung wird die Kapazität des pn-Überganges herabgesetzt, wodurch die Diode ein schnelleres Ansprechverhalten zeigt, weshalb die Verschaltung in der optischen Kommunikationstechnik eingesetzt wird. 1+1P

## Sonderaufgabe 1: Bolometer

In der Skizze sehen Sie Schaltung eines Bolometers:





- Erklären Sie sowohl Aufbau und Funktionsweise der Schaltung als auch den eigentlichen Sensoreffekt!
- Berechnen Sie die Signalspannung  $U_S$ ! Betrachten Sie hierbei die Spannungsabfälle über  $R_3$  und  $R_1$  und führen Sie geeignete Näherungen durch.
- Drücken Sie die Signalspannung im statischen Fall durch den Temperaturkoeffizienten  $\beta$ , den thermischen Widerstand  $R_{th}$ , den absorbierten Strahlungsfluss und die elektrische Verlustleistung  $P_{el}$  aus!
- Bewerten Sie den Faktor  $n$  hinsichtlich der Sensorempfindlichkeit und der Verlustleistung ab! Welche Konsequenz hat dies für die Praxis?

### Musterlösung:

- In Bolometern wird die Änderung des elektrischen Widerstandes eines Materials infolge einer Temperaturänderung als Sensoreffekt genutzt. Im Gegensatz zu Metall-Widerstandssensoren oder Thermistoren wird bei Bolometern die Erwärmung durch Absorption von Wärmestrahlung hervorgerufen. Der eigentliche Bolometerwiderstand  $R_3$  ist Teil einer Brückenschaltung, um Einflüsse der nicht durch Strahlung verursachten Temperatureffekte zu kompensieren. Von der Wärmestrahlung soll nur  $R_3$  verändert werden, weshalb nur dieser Widerstand auf der bestrahlten Membran angeordnet ist, während die übrigen drei Widerstände auf dem massiven Sensorrahmen, der dadurch auf Raumtemperatur liegt, angeordnet sind (in der Skizze angedeutet durch die Blende, die die restlichen Widerstände von der Strahlungsquelle abschirmt).

- Berechnung

$$\begin{aligned}
 U_S &= \left( \frac{R_3}{R_3 + R_4} - \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right) \cdot U = \left( \frac{R + \Delta R}{R + \Delta R + n \cdot R} - \frac{m \cdot R}{m \cdot R + n \cdot m \cdot R} \right) U \\
 &= \left( \frac{R + \Delta R}{(n+1)R + \Delta R} - \frac{1}{n+1} \right) U = \left( \frac{(n+1)(R + \Delta R) - (n+1)R + \Delta R}{((n+1)R + \Delta R)(n+1)} \right) U \\
 &= \left( \frac{n \cdot \Delta R}{(n+1)^2 R + \Delta R(n+1)} \right) U \stackrel{\Delta R \ll R}{=} \left( \frac{n \cdot \Delta R}{(n+1)^2 R} \right) U
 \end{aligned}$$

- Für den Temperaturkoeffizienten gilt:

$$\beta = \frac{1}{R} \frac{\Delta R}{\Delta T} \Rightarrow \frac{\Delta R}{R} = \beta \cdot \Delta T$$

$$\Rightarrow U_S = \beta \cdot \Delta T \frac{n}{(n+1)^2} U = \beta \cdot R_{th} \cdot (\Phi + P_{el}) \cdot \frac{n}{(n+1)^2} U$$

- Für die Signalspannung gilt:

$$U_S = \beta \cdot R_{th} \cdot (\Phi + P_{el}) \cdot \frac{n}{(n+1)^2} U \stackrel{P \ll \Phi}{\Rightarrow} S = \frac{U_S}{\Phi} = \beta \cdot R_{th} \cdot \frac{n}{(n+1)^2} U \propto \frac{1}{n}$$

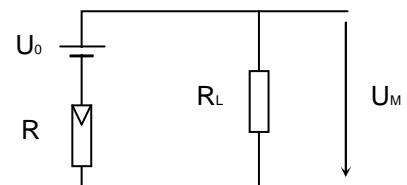
$$\text{Für die el. Verlustleistung gilt: } P_{el} = \frac{U_{R_3}^2}{R_3} = \frac{\left( \frac{R}{(n+1)R} \cdot U \right)^2}{R} = \frac{1}{(n+1)^2 \cdot R} U^2 \propto \frac{1}{n^2}$$

Um eine hohe Empfindlichkeit zu erreichen, müsste das  $n$  möglichst klein sein, was jedoch im Widerspruch zu der Verlustleistung steht! Denn um eine möglichst kleine Verlustleistung zu erhalten, ist ein großes  $n$  notwendig. Da jedoch die Verlustleistung ( $\sim 1/n^2$ ) schneller fällt mit steigendem  $n$ , als die Empfindlichkeit ( $\sim 1/n$ ), lässt sich  $n$  ungefähr abschätzen. In der Praxis muss um  $n$  abschätzen zu können, die zu erwartende Strahlungsleistung ungefähr bekannt sein. Je nach Anwendung muss  $n$  anders definiert werden: hohe Einstrahlleistung heißt, dass eine höhere elektrische Leistung tolerierbar ist. Damit steigt die Empfindlichkeit an und der Sensor kann preiswerter werden, da die nachfolgende Elektronik weniger aufwändig ist. Bei extremen Empfindlichkeitsanforderungen steigen insbesondere die Anforderungen an die Elektronik, die den Sensor dadurch teurer macht.

## Sonderaufgabe 2: Photowiderstand

Ein lichtempfindlicher Widerstand (Photowiderstand  $R$ ) ist im abgebildeten Schaltkreis mit der Spannungsquelle  $U_0$  und dem ohmschen Widerstand  $R_L$  verschaltet.

- a) Auf welchem Effekt beruht die Widerstandsänderung des Photowiderstands? Erläutern Sie anhand einer Skizze, warum der spektrale Messbereich nach oben und unten begrenzt ist.



- b) Skizzieren Sie den Aufbau eines solchen Widerstandelements und geben Sie zwei typische Materialien an! Warum werden keine einfachen Elektroden verwendet?
- c) Geben Sie die relative Widerstandsänderung  $\Delta R/R_0$  als Funktion des auftreffenden Strahlungsflusses  $\Phi$  an. Die Anzahl der optisch generierten Ladungsträger beträgt:

$$N_{\Phi} = \eta \cdot \alpha \cdot \tau_R \frac{\Phi_e}{h\nu}$$

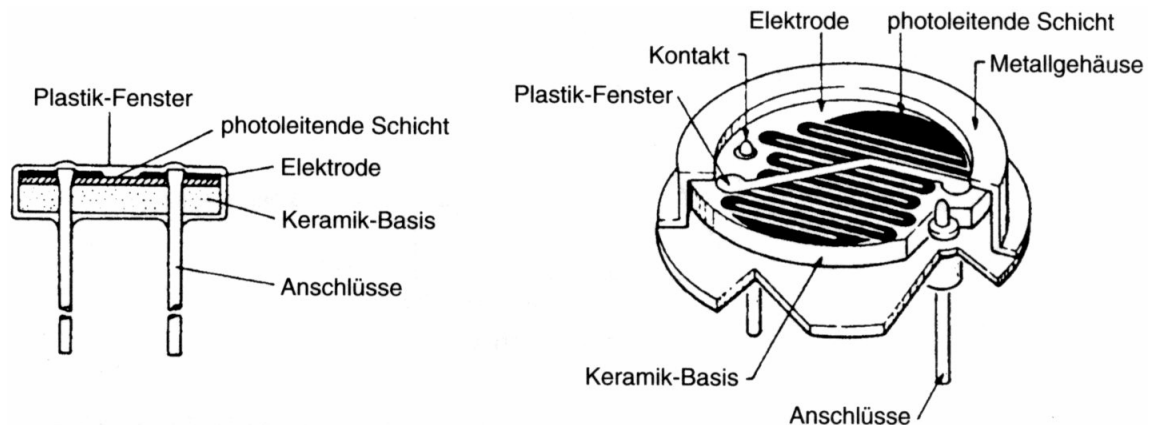
hierbei ist:  $\eta$  Quantenwirkungsgrad,  $\alpha$  Absorptionskoeffizient,  $\tau_R$  Rekombinationszeit,  $\Phi_e$  Strahlungsfluss und  $h\nu$  die Strahlungsenergie.

- d) Wie hängt die Messspannung  $U_M$  vom Strahlungsfluss  $\Phi$  formelmäßig ab und warum wird vorzugsweise die Spannung am Lastwiderstand statt dem Strom durch den Photowiderstand gemessen?

## Musterlösung

- a) Innerer Fotoeffekt im HL-Material. Erklärung mit Bänderschema: obere Grenze (Wellenlänge) = untere Grenze bezüglich der Photonenenergie: Bandlücke des Halbleiters. Ist die Energie zu klein, schafft das Elektron den Sprung vom Valenz- ins Leitungsband nicht. Untere Grenze der Wellenlänge = obere Grenze bezüglich der Photonenenergie: Abstand von unterer Valenz- bis zu oberer Leitungsbandkante. Ist die Energie zu groß, findet das Elektron keinen erlaubten Zustand im Leitungsband vor. 2P

- b) Skizze: HL-Material (CdS, PbS, PbSe, HgCdTe, InSb) auf Trägersubstrat, darüber zwei Interdigitalelektroden zur Kontaktierung, darüber optisch bzw. IR-transparente Schutzschicht. Interdigitalelektroden werden eingesetzt, da sonst der Grundwiderstand zu hoch wäre. 2P



- c) Es sei  $N_0$  die Ladungsträgerkonzentration ohne Bestrahlung,  $R_0$  der Widerstand ohne Bestrahlung. Der Widerstand ist umgekehrt proportional zur Ladungsträgerkonzentration:

$$\frac{R_\Phi}{R_0} = \frac{N_0}{N_0 + N_\Phi} \quad \text{mit} \quad N_\Phi = \frac{k \cdot \Phi_e}{h \cdot \nu}, \quad \text{also:} \quad R_\Phi = R_0 \frac{N_0}{N_0 + N_\Phi}$$

Für die Widerstandsänderung gilt:

$$\Delta R = R_0 - R_\Phi = R_0 - R_0 \frac{N_0}{N_0 + N_\Phi} = R_0 \left( 1 - \frac{N_0}{N_0 + N_\Phi} \right)$$

Daraus folgt das Verhältnis:

$$\frac{\Delta R}{R_0} = 1 - \frac{N_\Phi}{N_0 + N_\Phi}$$

Setzt man hier die oben angegebene Beziehung zwischen  $N_\Phi$  und  $\Phi$  ein, so erhält man den gewünschten Zusammenhang. 3P

- d) Durch Bilden des Verhältnisses  $U_M/U_0$  folgt:

2P

$$\frac{U_M}{U_0} = \frac{R_L}{R_\Phi + R_L} = \frac{R_L}{R_0 \cdot \frac{N_0}{N_0 + N_\Phi} + R_L}$$

Die oben gewählte Anordnung ist betriebssicherer als eine Messung des Stromes durch den Photowiderstand: da der Strom mit zunehmender Bestrahlung immer weiter ansteigt, könnte der Photowiderstand bei großer Lichtstärke bei Betrieb ohne Lastwiderstand zerstört werden. Der Lastwiderstand begrenzt den maximalen Strom auf  $I_{\max} = U_0/R_L$  für  $\Phi \rightarrow \infty$ .

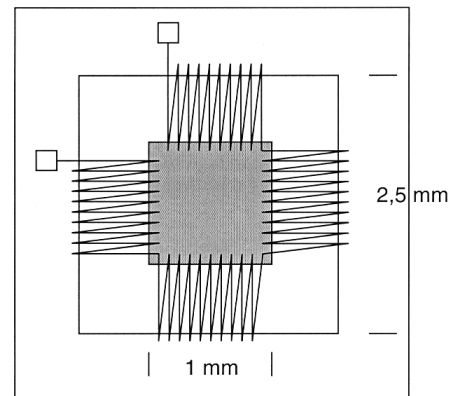
### Sonderaufgabe 3: Thermopile

Ein Thermopile-Sensor auf Siliziumbasis soll zur berührungslosen Temperaturmessung im Pkw eingesetzt werden. Das so gewonnene Signal kann z.B. zur Steuerung der Klimaanlage benutzt werden. Der verwendete Sensor erfasst einen Raumwinkel von  $10^\circ$ .

- a) Welche Strahlungsleistung empfängt der Sensor von einer 1 m entfernten Person bei einer Umgebungstemperatur von 20°C?

Zum Vergleich: Welche Strahlungsleistung würde ohne Filter bei direkter Sonneneinstrahlung (1000 kWh pro Jahr und m<sup>2</sup>) auf die Empfängerfläche auftreten?

- b) Schätzen Sie jeweils die Temperaturerhöhung der Sensorfläche für beide Fälle aus a) ab. Die Dicke der Thermoschenkel aus InAs beträgt  $d = 1 \mu\text{m}$ , die Breite  $b = 10 \mu\text{m}$  und der Wärmeleitwert des Materials  $\lambda = 0,25 \text{ W}/(\text{cm}\cdot\text{K})$ . Für die Abschätzung können Sie die Wärmeleitung durch die Membran vernachlässigen.
- c) Welche Signalspannung erhält man mit 200 Thermopaaren aus InAs auf der Membran?
- d) Warum muss zusätzlich die Umgebungstemperatur erfasst werden und wie wird dies sinnvoll in das Sensorelement integriert?



### Musterlösung zu Sonderaufgabe 3: Thermopile

- a) Laut Vorlesung gilt:

$$\Phi = \frac{\sigma \cdot A_1 \cdot A_2}{\pi \cdot a^2} (T_1^4 - T_2^4)$$

Mit  $A_1$  : sichtbare Strahlerfläche

$A_2 = 1 \text{ mm}^2$

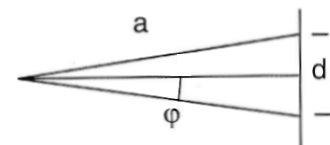
$a$  : Abstand

$T_1$  : Temperatur des Strahlers (Mensch ca. 310 K, Sonne ca. 6000 K)

$T_2$  : Temperatur des Sensors (293 K)

Da der Sensor einen Raumwinkel von 10° erfasst, ist die Fläche, die er von einer 1m entfernten Person sieht gemäß der Skizze:

$$A = \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \pi \cdot \left(a \cdot \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)^2 = 0,024 \text{ m}^2$$



Für die Person ergibt sich ein Strahlungsfluss von  $\Phi = 808 \text{ nW}$ .

Für die Sonne ergibt sich eine Bestrahlungsstärke von  $E = 114 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$ , was bei einer Sensorfläche von

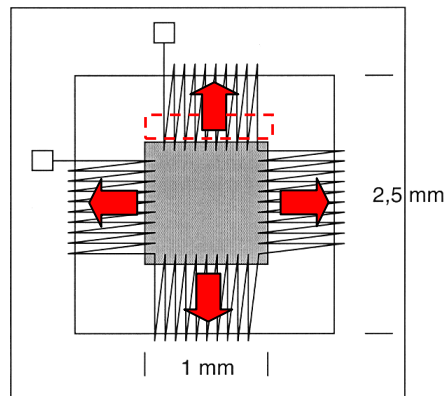
$1 \text{ mm}^2$  einen Strahlungsfluss von 114 μW, also einen etwa 141-fachen Wert im Vergleich zum Strahlungsfluss, der durch einen Menschen hervorgerufen wird, ergibt.

- b) Vereinfacht man die Betrachtung, indem man nur die Wärmeleitung durch die Thermoschenkel betrachtet, so ergibt sich im Gleichgewicht:

$$\Phi = Q \cdot \Delta T = \frac{\lambda \cdot A}{l} \Delta T$$

mit  $A$  : Querschnittsfläche des leitenden Materials

$l$  : Länge des leitenden Materials



$$A = 10\mu\text{m} \cdot 1\mu\text{m} \cdot 200 = 2000\mu\text{m}^2$$

$$l = (2,5 - 1) / 2 \text{ mm} = 0,75 \text{ mm}$$

$$\Delta T = \frac{\Phi \cdot l}{A \cdot \lambda}$$

Daraus ergibt sich für den Menschen:

$$\Delta T_{\text{Mensch}} = \frac{808 \cdot 10^{-9} \text{ W} \cdot 0,75 \cdot 10^{-3} \text{ m}}{2 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2 \cdot 25 \frac{\text{W}}{\text{mK}}} = 3,03 \cdot 10^{-3} \text{ K}$$

und für die Sonne:

$$\Delta T_{\text{Sonne}} = \frac{114 \cdot 10^{-6} \text{ W} \cdot 0,75 \cdot 10^{-3} \text{ m}}{2 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2 \cdot 25 \frac{\text{W}}{\text{mK}}} = 0,43 \text{ K}$$

c) Laut Vorlesung gilt:

$$U_T = n \cdot \alpha \cdot \Delta T$$

$$U_{T,\text{Mensch}} = 200 \cdot 200 \frac{\mu\text{V}}{\text{K}} \cdot \Delta T_{\text{Mensch}} = 200 \cdot 200 \frac{\mu\text{V}}{\text{K}} \cdot 3,03 \cdot 10^{-3} \text{ K} = 0,12 \text{ mV}$$

$$U_{T,\text{Sonne}} = 200 \cdot 200 \frac{\mu\text{V}}{\text{K}} \cdot \Delta T_{\text{Sonne}} = 200 \cdot 200 \frac{\mu\text{V}}{\text{K}} \cdot 0,43 \text{ K} = 17,1 \text{ mV}$$

- d) Wie oben gezeigt, ist der Netto-Strahlungsfluss von der Temperatur von Sender und Empfänger abhängig. Da der Sensor dann den Strahlungsfluss linear in die Signalspannung umsetzt, wirkt sich also die Sensortemperatur auf die Anzeige aus. Wäre der Sensor ebenfalls 37°C warm, würde er bei Messung des Menschen 0 V liefern, wäre der Sensor heißer, dann würde die Signalspannung sogar negativ werden.

Man integriert auf dem Sensorchiprahmen einen "normalen" Temperatursensor, der ein absolutes Temperatursignal liefert. Dies könnte z.B. ein Metallschicht-Temperatursensor sein, da sich dieser in der gleichen Technologie herstellen lässt wie die restlichen Strukturen. Ein Thermoelement auf dem Rahmen geht natürlich nicht.

## Musterlösung zu Übung 3 zur Vorlesung Messtechnik I im SS 2006

Abgabe: KW 25, 15 Punkte

### Hausaufgabe 1: Hall-Effekt

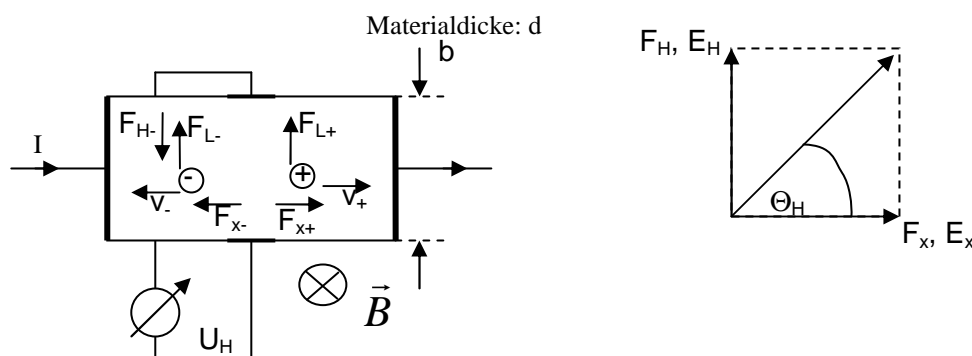
6 Punkte

- (2P) Beschreiben Sie den Hall-Effekt mit eigenen Worten und fertigen Sie eine Skizze an! Gibt die Hallspannung Aufschluss über die Art der Ladungsträger? Begründung!
- (1P) Leiten Sie eine Formel zur Berechnung des Hall-Winkel ( $\theta_H$ ) her!  
*Hinweis:  $\tan(\theta_H) = F_B / F_{E \text{ längs}}$ ; ( $\theta_H$ : Hallwinkel,  $F_B$ : Lorentzkraft,  $F_E$ : Elektrische Kraft in Längsrichtung)*
- (1P) Leiten Sie eine Formel zur Berechnung der Hall-Spannung in Abhängigkeit von der magnetischen Flussdichte und der Stromdichte her!
- (2P) Ein InAs – Halbleiter wird als Hallgenerator benutzt. Der Sensor ist  $4 \mu\text{m}$  dick und wird von einem Strom der Stärke  $6 \text{ mA}$  durchflossen. Senkrecht zum Strom wirkt eine magnetische Flussdichte von  $0,1 \text{ T}$ . Berechnen Sie die Hallspannung sowie die Empfindlichkeit des Sensors! Wie groß ist der Hallwinkel? Hinweis: Ladungsträgerbeweglichkeit  $\mu = 2 \text{ m}^2/(\text{V}\cdot\text{s})$ , spez. Leitfähigkeit  $\sigma = 1,7 \cdot 10^4 (\Omega\cdot\text{m})^{-1}$

### Musterlösung zur Hausaufgabe 1: Hall-Effekt

- Ladungsträger, die sich in einem Magnetfeld bewegen, werden senkrecht zu ihrer Geschwindigkeit und zur magnetischen Flussdichte durch die Lorentz-Kraft abgelenkt (siehe Skizze). Senkrecht zu r Stromrichtung und der Richtung der magnetischen Flussdichte entsteht eine elektrische Feldstärke, die von außen als Hallspannung messbar ist.

0,5P



0,5P

- Lorentz-Kraft:  $\vec{F}_L = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$

Hallwinkel:

1P

Der Hallwinkel beschreibt die Ablenkung der Ladungsträgerbewegung zur Stromrichtung, hervorgerufen durch die Kraftwirkung des B-Feldes. Er ist der Winkel  $\tan(\theta_H) = \frac{|\vec{E}_H|}{|\vec{E}_x|}$ , wobei  $E_H$  das elektrische

Gegenfeld zur Lorentzkraft ist ( $\vec{F}_L = -\vec{F}_H$ ,  $\vec{F}_H = q \cdot \vec{E}_H$ ) und in Aufgabenteil c) zur Herleitung der Hallspannung herangezogen wird.  $E_x$  ist das elektrische Feld in Stromrichtung der Kraft ( $F_x$ ) auf die Ladungsträger in Stromrichtung. Der „Antrieb“ des Stromes in x-Richtung.

$F_x = E_x \cdot q = \frac{v}{\mu} \cdot q$ , mit  $v$ : Driftgeschwindigkeit der Ladungsträger und  $\mu$ : Beweglichkeit der Ladungsträger

$F_H = q \cdot v \cdot B$ , da  $v$  und  $B$  senkrecht aufeinander stehen, sonst mit dem Faktor  $\sin(\angle v, B)$ .

$$\Rightarrow \tan(\theta_H) = \frac{E_H}{E_x} = \mu \cdot B$$

c)

Die der Lorentzkraft entgegen gerichtete elektrische Kraft ist:  $\vec{F}_E = q \cdot \vec{E}$

$$F_B = -F_E$$

$$q \cdot \vec{v} \times \vec{B} = -q \cdot \vec{E}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = -\frac{1}{q \cdot n} \cdot \vec{S} \times \vec{B}$$

$$\text{Mit Stromdichte } \vec{S} = q \cdot n \cdot \vec{v} = \frac{I}{b \cdot d}$$

1P

$$U_H = -\vec{E} \cdot b = -\frac{b}{q \cdot n} \cdot \vec{S} \times \vec{B} = -\frac{R_H}{d} \cdot I \cdot B$$

d) Die Art der Ladungsträger kann man anhand des Vorzeichens der Hallspannung ablesen: Wie in der Skizze ersichtlich, werden negative sowie positive Ladungsträger zur gleichen Seite des Materials hin abgelenkt!  
1P

e) Berechnung:

$$U_H = -\frac{R_H}{d} \cdot I \cdot B \stackrel{n\text{-Halbleiter}}{=} \frac{\mu}{\sigma \cdot d} \cdot I \cdot B = \frac{2 \frac{m^2}{V \cdot s}}{1,7 \cdot 10^4 \frac{1}{\Omega \cdot m} \cdot 4 \mu m} \cdot 6 mA \cdot 0,1 T = 17,6 mV$$

$$S = \frac{U_H}{I \cdot B} = \frac{\mu}{\sigma \cdot d} = \frac{2 \frac{m^2}{V \cdot s}}{1,7 \cdot 10^4 \frac{1}{\Omega \cdot m} \cdot 4 \mu m} = 29,4 \frac{V}{A \cdot T}$$

2P

$$\tan \Theta = \mu \cdot B \Rightarrow \Theta = \tan^{-1}(\mu \cdot B) = \tan^{-1}\left(2 \frac{m^2}{V \cdot s} \cdot 0,1 T\right) = 0,19 \text{ rad} = 10,9^\circ$$

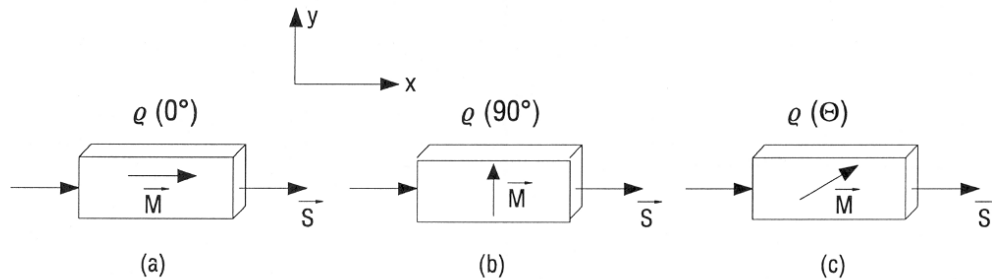
## Hausaufgabe 2: Anisotroper magnetoresistiver Effekt

4 Punkte

- (1P) Erklären Sie den anisotropen magnetoresistiven Effekt bei ferromagnetischen Werkstoffen! Geben Sie die Formel für die relative Widerstandsänderung an!
- (1P) Was sind „Barberpole“ im Zusammenhang mit AMR-Sensoren? Welche Funktion haben sie?
- (2P) Leiten Sie den allgemeinen Kennlinienverlaufs eines magnetoresistiven Streifens mit Barberpolen her, indem Sie von der Kennliniengleichung  $R(H)$  für ferromagnetische Schichtstreifen ausgehen!

- a) In ferromagnetischen Werkstoffen gibt es, auch ohne Einwirkung eines äußeren magnetischen Feldes, kleine Bezirke spontaner Magnetisierung (Weißsche Bezirke). Beim elektrischen Stromfluss durch ferromagnetische Materialien ist es entscheidend, welchen Winkel der Stromdichtevektor und der Vektor der inneren Magnetisierung zueinander einnehmen. Der spezifische Widerstand ist hierbei richtungsabhängig (siehe Skizze).

1P



Für den anisotropen magnetoresistiven Effekt ist die relative Änderung des spezifischen Widerstandes bezeichnend:

$$\frac{\Delta \rho_{\max}}{\rho(90^\circ)} = \frac{\rho(0^\circ) - \rho(90^\circ)}{\rho(90^\circ)}$$

- b) Die Kennlinie magnetoresistiver Sensoren hat für  $H_y = 0$  die Steigung null und ist damit für Messaufgaben ungeeignet. Eine günstigere  $R(H)$  Kennlinie ergibt sich, wenn der Winkel zwischen Stromdichte und Magnetisierung ohne äußeres Feld nicht wie beim einfachen Streifen  $0^\circ$  sondern  $45^\circ$  beträgt. Technologisch wird diese Drehung des Stroms durch auf den Permalloy-Streifen aufgebrachte, dünne metallische Leiterbahnen realisiert. Die Leiterbahnen sind so strukturiert, dass sie um  $45^\circ$  gegen die Längsrichtung des Streifens geneigt sind. Da die metallischen Dünnschichtstreifen aufgrund ihrer hohen Leitfähigkeit relativ zum ferromagnetischen Material Äquipotentiallinien darstellen, müssen die Feld- und Stromlinien senkrecht aus den Äquipotentiallinien austreten. Die dargestellte Streifenanordnung wird als „Barberpol“-Struktur bezeichnet.

1P

- c) Ausgangsgleichung:

$$R(H_y) = R_{\max} - \Delta R \cdot \sin^2(\Theta)$$

$$\Theta = \varphi - 45^\circ$$

$$\sin^2(\Theta) = \sin^2(\varphi - 45^\circ) = (\sin \varphi \cdot \cos 45^\circ - \cos \varphi \cdot \sin 45^\circ)^2 = \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (\sin \varphi - \cos \varphi) \right]^2$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (\sin^2 \varphi - 2 \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi + \cos^2 \varphi) = \frac{1}{2} \cdot (1 - 2 \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi) = \frac{1}{2} - \sin \varphi \cdot \cos \varphi$$

$$= \frac{1}{2} - \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} \cdot \sin \varphi$$

2P

$$\Rightarrow R(\varphi) = R_{\max} - \frac{\Delta R}{2} + \Delta R \cdot \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} \cdot \sin \varphi$$

$$\text{mit } \sin \varphi = \frac{H_y}{H_k}$$

$$\Rightarrow R(\varphi) = R_{\max} - \frac{\Delta R}{2} + \Delta R \cdot \frac{H_y}{H_k} \cdot \sqrt{1 - \left( \frac{H_y}{H_k} \right)^2}$$



### Hausaufgabe 3: MR-Sensor zur Strommessung

6 Punkte

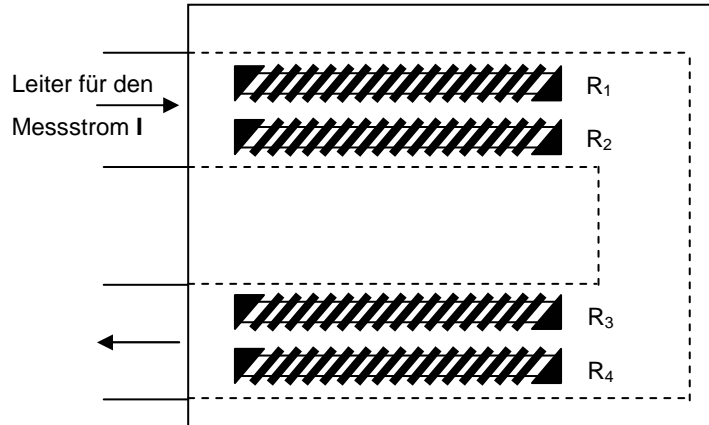
Zur Strommessung kann die unten skizzierte Anordnung mit vier MR-Sensorstreifen mit Barberpolen und auf der anderen Seite des Substrats (Dicke 1 mm) liegender Stromschleife verwendet werden.

- a) (2P) Die MR-Streifen werden zu einer Vollbrücke verschaltet. Schätzen Sie Messbereich und Empfindlichkeit  $S = (U_S/U_B)/I$  des Sensors ab, wenn das verwendete MR-Material folgende Kenngrößen hat:

MR-Koeffizient:  $k_{MR} = 3\%$

Koerzitivfeldstärke:  $H_k = 2 \text{ kA/m}$

- b) (2P) Wie wirken sich homogene Störfelder auf das Messergebnis aus? Welchen Wert dürfen die Störfelder nicht überschreiten? (Ohne Rechnung zu beantworten!)



Zur Erweiterung des Messbereichs kann das Kompensationsprinzip eingesetzt werden.

- c) (2P) Welche zusätzliche Struktur wird dafür auf dem Sensorchip benötigt? Skizzieren Sie die Anordnung im Querschnitt! Warum ist der benötigte Kompensationsstrom deutlich kleiner als der Messstrom?

### Lösung zu MR-Sensor zur Strommessung

- a) Der nutzbare Feldmessbereich eines MR-Sensorelementes mit Barberpolen reicht etwa bis zur halben Koerzitivfeldstärke. Also muss gelten:

$$-1 \text{ kA/m} < H_I < 1 \text{ kA/m}$$

Grob gilt für das vom Strom am Ort des MR-Streifens erzeugte Feld:

$$H_I = I/d$$

und damit ist der nutzbare Strommessbereich etwa

$$-1 \text{ A} < I < 1 \text{ A.}$$

1P

Für die Brückenschaltung gilt laut Vorlesung:

$$U_S = U_B \cdot 1/2 \cdot k_{MR} \cdot \sin(2\theta) \text{ mit } \sin \theta = H_I/H_k.$$

Bei kleinen Feldern  $H_I$  kann die Linearität des Sinus ausgenutzt werden:

$$U_S = U_B \cdot k_{MR} \cdot H_I/H_k.$$

Mit  $H_I = I/d$  wie oben gilt dann für die Empfindlichkeit  $S$ :

$$S = (U_S/U_B)/I = k_{MR}/(H_k \cdot d) = 0,015 \text{ A}^{-1} = 15 \text{ mV/V / A}$$

1P

- b) Homogene Störfelder bewirken keine Änderung des Ausgangssignals, da alle Widerstände durch ein homogenes Feld in gleicher Weise beeinflusst werden, die sich ergebende Widerstandsänderung wird durch die Brückenordnung unterdrückt (ähnlich wie Temperatureinflüsse). Es ergibt sich erst eine Auswirkung, wenn das Gesamtfeld (Summe aus zu messendem Feld und Störfeld) so groß wird, dass die lineare Näherung für die Widerstandsänderung in Abhängigkeit von Magnetfeld nicht mehr gilt. 2P
- c) Ein Kompensationsleiter, der parallel zum Messstromleiter angeordnet wird (allerdings auf der gleichen Substratseite wie die MR-Struktur, damit nur ein geringer Strom benötigt wird). Skizze siehe Folie 3.10. Da der Messstrom ca. 1 mm vom MR-Material entfernt ist, der Kompensationsleiter aber nur etwa

1  $\mu\text{m}$  ist der benötigte Kompensationsstrom etwa um den Faktor 1000 kleiner als der Messstrom:  $H \approx I/d$  also  $I_{\text{komp}} \approx I_{\text{mess}} \cdot d_{\text{komp}}/d_{\text{mess}}$ . Erklärung und Skizze je 1P

## Sonderaufgabe 1: IRED und Photodiode

Eine IR-Lumineszenzdiode (IRED mit  $\lambda_{\text{max}} = 840 \text{ nm}$ ) bildet zusammen mit einer Photodiode eine Lichtschranke (Abstand  $r = 5 \text{ m}$ ). Der Dunkelstrom  $I_0$  der Photodiode beträgt bei 10 V Vorspannung 2 nA. Die Photodiode ist ein Tiefpass mit  $f_g = 100 \text{ Hz}$ . Weitere Kennwerte sind:

IRED:  Strahlstärke $I_s = 20 \text{ mW/sr}$	Photodiode:  $A = 7 \text{ mm}^2$ ; $\lambda_{\text{max}} = 850 \text{ nm}$  $\text{NEP} = 4,1 \cdot 10^{-14} \frac{\text{W}}{\sqrt{\text{Hz}}}$ ; $S(\lambda) = 0,6 \frac{\text{A}}{\text{W}}$
----------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

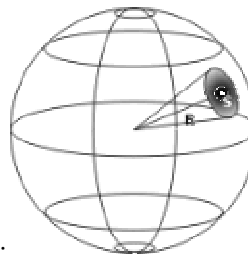
- Berechnen Sie den Strahlungsfluss auf die Photodiode!
- Berechnen Sie das Messsignal-Rausch-Verhältnis (SNR) und geben Sie den Wert in dB an!
- Berechnen Sie den Photostrom  $I_{\text{ph}}$ !
- Berechnen Sie das Messsignal-Dunkelstrom-Verhältnis!

## Musterlösung

- Unter einem Raumwinkel versteht man den Quotienten aus dem Flächeninhalt eines Teilstücks einer Kugeloberfläche  $A$  und dem Quadrat des zugehörigen Kugelradius  $r$ :

$$\Omega = \frac{A}{r^2} \quad [\Omega = 1 \text{ sr}]$$

Veranschaulichung:



Anders als das Bild vielleicht vermuten ließe, spielt die Umrissform des Flächenstücks keine Rolle. Jede Umrissform auf der Kugeloberfläche mit dem gleichen Flächeninhalt definiert einen Raumwinkel der gleichen Größe.

$$\Phi(\lambda) = \frac{I_s \cdot A}{r^2} = \frac{20 \frac{\text{mW}}{\text{sr}} \cdot 7 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2}{25 \text{ m}^2} = 5,6 \text{ nW}$$

$$\text{b) } \text{SNR} = \frac{\Phi(\lambda)}{\text{NEP} \cdot \sqrt{f_g}} = \frac{5,6 \cdot 10^{-9} \text{ W}}{4,1 \cdot 10^{-14} \frac{\text{W}}{\sqrt{\text{Hz}}} \cdot \sqrt{100 \text{ Hz}}} = 1,37 \cdot 10^4$$

$$\text{das entspricht } 20 \cdot \lg(1,37 \cdot 10^4) \text{ dB} = 82 \text{ dB}$$

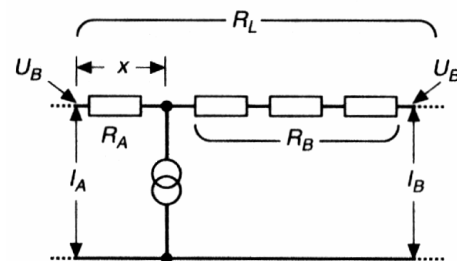
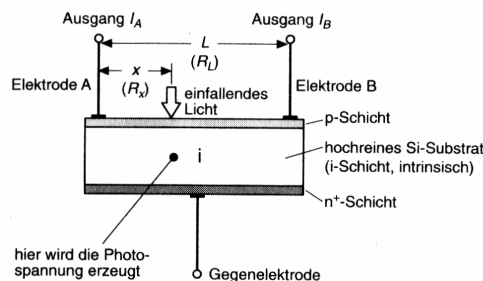
$$c) \quad I_{ph} = S(\lambda) \cdot \Phi(\lambda) = 0,6 \frac{A}{W} \cdot 5,6 \cdot 10^{-9} W = 3,36 nA$$

$$d) \quad \frac{I_{ph}}{I_0} = \frac{3,36 nA}{2 nA} = 1,68$$

## Sonderaufgabe 2 : Ortsauflösende bipolare HL-Sensoren (PSD)

Optischen Sensoren wie Photowiderstände oder Phototransistoren können zwar die Anwesenheit und Stärke einer optischen Strahlung detektieren, eine Ortsbestimmung erlauben sie allerdings nur in sehr eingeschränktem Maß. Zur Ortsbestimmung werden daher beispielsweise PSD-Sensoren eingesetzt.

- a) Erläutern Sie das Funktionsprinzip einer eindimensionalen Messanordnung anhand der Skizze!

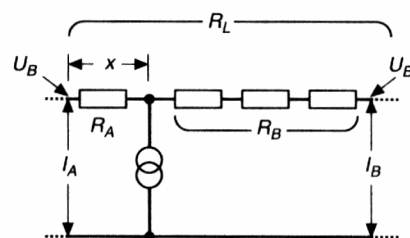
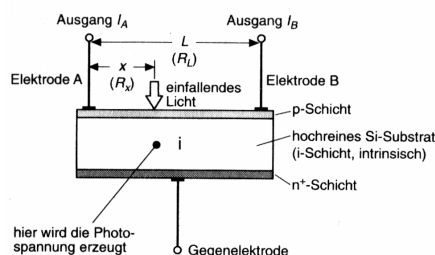


- b) Entwickeln Sie für den eindimensionalen Fall eine Formel für den Ort  $x$  in Abhängigkeit der Ströme  $I_A$  und  $I_B$ , wobei für  $x$  gelten soll:  $-L/2 \leq x \leq L/2$ ,  $L$ : Länge der sensitiven Strecke! *Hinweis: Benutzen Sie das Ersatzschaltbild in der Abbildung rechts!*
- c) Wie lässt sich mit zwei zweidimensionalen ortsauflösenden Sensoren eine Richtungsbestimmung durchführen? Qualitativ, ohne Rechnung!

## MUSTERLÖSUNG:

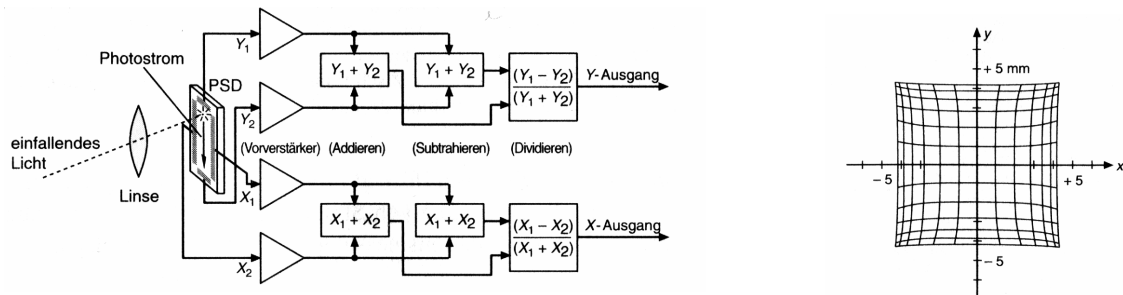
- a) Eindimensional:

Fällt der Laserstrahl am Ort  $x$  einer langausgedehnten Photodiode auf, dann entsteht dort der Photostrom  $I_{ges}$ . Bei einem Abgriff am Ort der Elektroden A und B teilt sich der Strom entsprechend der Widerstände zwischen Auftreffpunkt und Elektroden in zwei Teilströme  $I_A$  und  $I_B$  auf. Aus den Strömen kann dann die Position zurückberechnet werden (siehe b).



- Zweidimensional:

Der Aufbau eines zweidimensionalen PSDs erweitert den eindimensionalen dahingehend, dass man nicht mehr eine lang ausgestreckte Photodiode hat, sondern eine quadratische Photodiode. An allen Rändern des Quadrats werden mit Elektroden die Photoströme abgegriffen und in x- und y-Koordinate ausgewertet.



b) Bei einem Auftreffpunkt  $x$  des Laserstrahls (siehe Skizze) teilt sich der Widerstand der Diode in die zwei Teilwiderstände auf. An dem Ort  $x$  erzeugt das einfallende Licht den Photostrom  $I_{ges}$ , der von der Bestrahlungsstärke abhängt.

$$R \cdot I = U_A = U_B$$

$$R_A = x/L \cdot R_{ges}$$

$$R_B = (L-x)/L \cdot R_{ges}$$

$$\Rightarrow I_A = I_{ges} \cdot ((L-x)/L) = I_{ges} \cdot (1-x/L)$$

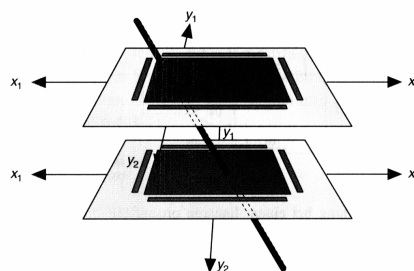
$$I_B = I_{ges} \cdot (x/L)$$

$$\Rightarrow I_B - I_A = I_{ges} \cdot (2x-L)/L, \text{ für } x = 0 \dots L, \text{ Umformung: } x' = x - L/2, \text{ dann } -L/2 \leq x' \leq L/2$$

$$\Rightarrow I_B - I_A = I_{ges} \cdot 2x'/L = (I_A + I_B) \cdot 2x'/L$$

$$\Rightarrow x' = L/2 \cdot (I_B - I_A)/(I_A + I_B)$$

c)



Durch die Verwendung zweier dünner optisch transparenten PSD-Sensoren, die wie in der Skizze angeordnet sind, lässt sich eine Richtungsbestimmung durchführen. (Skizze Schaumburg, *Sensoren*, S. 356). (Die Sensoren bestehen z.B. aus dünnen wasserstoffdotierten Polysiliziumschichten mit einer optisch transparenten elektrisch gut leitenden Schottky-Metallisierung (Indium-Zinnoxid).) Aus den bestimmten Positionen in beiden Ebenen kann bei bekanntem Abstand der Neigungswinkel des einfallenden Lichtstrahls in x- und y-Ebene bestimmt werden.

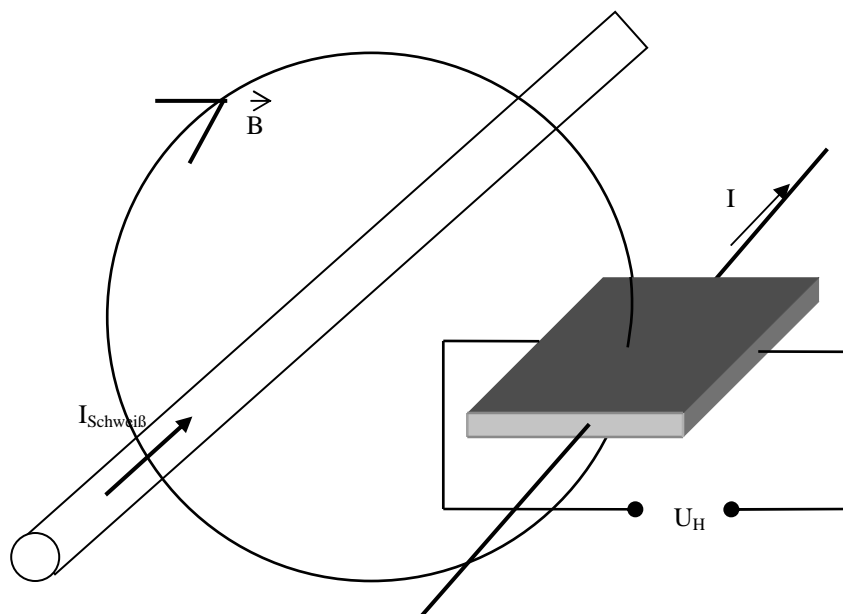
### Sonderaufgabe 3: Schweißstromsonde

Die Siliziumschicht eines integrierten Hallsensors ist mit Phosphor und Bor dotiert. Die Donatorkonzentration beträgt  $N_D = 4 \cdot 10^{20} \text{ m}^{-3}$  und die Akzeptorkonzentration  $N_A = 5 \cdot 10^{20} \text{ m}^{-3}$ . Die Beweglichkeiten der Ladungsträger sind  $\mu_n = 0,14 \frac{\text{m}^2}{\text{V} \cdot \text{s}}$  und  $\mu_p = 0,05 \frac{\text{m}^2}{\text{V} \cdot \text{s}}$ . Die Streukoeffizienten sind  $a_m = 1,15$  und  $a_{np} = 1$ . Die Sensorschicht ist  $2 \mu\text{m}$  dick. Der Hallsensor wird zur Messung des Schweißstromes einer Kondensatorimpulsschweißmaschine verwendet. Der Sensor wird im Abstand von 40 cm von der elektrischen Zuleitung der Schweißelektroden angeordnet.

- Skizzieren Sie, wie der Hallsensor mit seinen Anschlusskontakten zur Strombahn der Schweißelektroden-Anschlüsse angeordnet sein muss!
- Berechnen Sie den Hallkoeffizienten!
- Welcher Schweißstrom fließt, wenn bei einem Strom durch den Hallsensor von 1 mA eine Hallspannung von 3 mV gemessen wird?

#### Musterlösung: Schweißstromsonde

- Skizze:



- Hallkoeffizient:

$$\begin{aligned}
 R_H &= \frac{1}{e} \cdot \frac{p \cdot a_{rp} \cdot \mu_p^2 - n \cdot a_{rn} \cdot \mu_n^2}{(n \cdot \mu_n + p \cdot \mu_p)^2} = \\
 &= \frac{1}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As}} \cdot \frac{4 \cdot 10^{20} \text{ m}^{-3} \cdot \left(0,05 \frac{\text{m}^2}{\text{V} \cdot \text{s}}\right)^2 - 5 \cdot 10^{20} \text{ m}^{-3} \cdot 1,15 \cdot \left(0,14 \frac{\text{m}^2}{\text{V} \cdot \text{s}}\right)^2}{\left(5 \cdot 10^{20} \text{ m}^{-3} \cdot 0,14 \frac{\text{m}^2}{\text{V} \cdot \text{s}} + 4 \cdot 10^{20} \text{ m}^{-3} \cdot 0,05 \frac{\text{m}^2}{\text{V} \cdot \text{s}}\right)^2} = \\
 &= \frac{\text{m}^2}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As}} \cdot \frac{-1,027 \cdot 10^{19}}{8,1 \cdot 10^{39}} = -7,92 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}^2}{\text{As}}
 \end{aligned}$$

1P

c) Für lange Leiter gilt:

$$\begin{aligned}
 B &= \frac{\mu_0 \cdot I_S}{2 \cdot \pi \cdot r} \\
 U_H &= -\frac{R_H}{d} \cdot I \cdot B \Rightarrow I_S = -\frac{U_H \cdot d \cdot 2 \cdot \pi \cdot r}{\mu_0 \cdot I \cdot R_H} = \\
 &= -\frac{3 \text{ mV} \cdot 2 \mu\text{m} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 0,4 \text{ m}}{1,256 \cdot 10^{-6} \frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{A} \cdot \text{m}} \cdot 1 \text{ mA} \cdot \left(-8,16 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}^3}{\text{A} \cdot \text{s}}\right)} = 1514 \text{ A}
 \end{aligned}$$

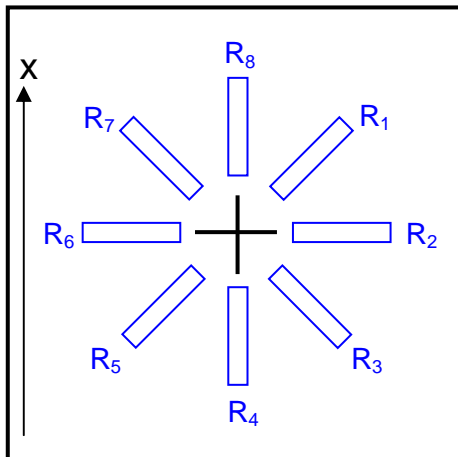
3P

## Musterlösung zu Übung 4 zur Vorlesung Messtechnik I im SS 2006

Abgabe: KW 27, 18 Punkte

### Hausaufgabe 1: Absolute Winkelmessung

7 Punkte



Für eine berührungslose Winkelmessung wird mit dem skizzierten MR-Sensor, bestehend aus 8 MR-Widerstandselementen **ohne** Barberpole (MR-Koeffizient  $k_{MR} = 4,5 \%$ ) das Feld eines Stabmagneten abgetastet.

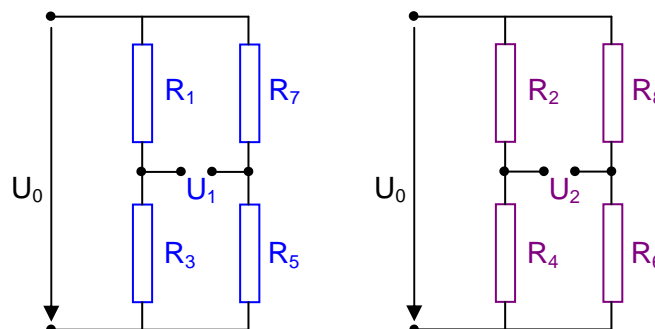
Der Magnet ist ausreichend stark, um die Magnetisierung der Elemente vollständig auszurichten.

Die Sensorelemente werden zu zwei Vollbrücken verschaltet, die mit einer Spannung von  $U_0 = 5 \text{ V}$  versorgt werden.

- (5P) Skizzieren Sie die Verschaltung der Sensorelemente zu zwei Vollbrücken, geben Sie die Ausgangssignale der Brücken in Abhängigkeit vom Winkel  $\varphi$  zwischen Stabmagnet und x-Achse des Chips an und bestimmen Sie die Signalamplitude!
- (2P) Wie groß ist der Messbereich dieses Sensors und warum werden zwei Brücken eingesetzt?

### MUSTERLÖSUNG zu Hausaufgabe 1: Absolute Winkelmessung

- Verschaltung der acht Sensorelemente zu zwei Vollbrücken.



1P

Für MR-Widerstände ohne Barberpole gilt nach Vorlesung mit dem Winkel  $\Theta$  zwischen Stromrichtung und Magnetfeld:

$$R = R_{mittel} + \frac{1}{2} \Delta R_{max} \cdot \cos 2\Theta$$

1P

Die Widerstände  $R_i$  sind hier jeweils um den Winkel  $i \cdot \pi/4$  gegenüber der x-Achse des Chips gedreht, damit ergibt sich bei einem Winkel  $\varphi$  zwischen Stabmagnet und x-Achse folglich der Winkel  $(\varphi - i \cdot \pi/4)$  zwischen der Stromrichtung des Elements  $R_i$  und dem Magnetfeld und damit:

0,5P

$$R_{1,5} = R_{\text{mittel}} + \frac{1}{2} \Delta R_{\text{max}} \cdot \cos\left(2\varphi - \frac{\pi}{2}\right) = R_{\text{mittel}} + \frac{1}{2} \Delta R_{\text{max}} \cdot \sin 2\varphi$$

0,5P

$$R_{3,7} = R_{\text{mittel}} + \frac{1}{2} \Delta R_{\text{max}} \cdot \cos\left(2\varphi - \frac{3\pi}{2}\right) = R_{\text{mittel}} - \frac{1}{2} \Delta R_{\text{max}} \cdot \sin 2\varphi$$

$$R_{2,6} = R_{\text{mittel}} + \frac{1}{2} \Delta R_{\text{max}} \cdot \cos(2\varphi - \pi) = R_{\text{mittel}} - \frac{1}{2} \Delta R_{\text{max}} \cdot \cos 2\varphi$$

0,5P

$$R_{4,8} = R_{\text{mittel}} + \frac{1}{2} \Delta R_{\text{max}} \cdot \cos(2\varphi - 2\pi) = R_{\text{mittel}} + \frac{1}{2} \Delta R_{\text{max}} \cdot \cos 2\varphi$$

Damit ergeben sich für die beiden Vollbrücken jeweils die Ausgangsspannungen:

$$U_1 = U_0 \cdot \frac{\Delta R}{R_{\text{mittel}}} = \frac{1}{2} U_0 \frac{\Delta R_{\text{max}}}{R_{\text{mittel}}} \sin 2\varphi = \frac{1}{2} U_0 k_{MR} \sin 2\varphi$$

0,5P

$$U_2 = U_0 \cdot \frac{\Delta R}{R_{\text{mittel}}} = \frac{1}{2} U_0 \frac{\Delta R_{\text{max}}}{R_{\text{mittel}}} \cos 2\varphi = \frac{1}{2} U_0 k_{MR} \cos 2\varphi$$

Die Signalamplitude ist damit in beiden Fällen:

$$\hat{U}_{1,2} = \frac{1}{2} U_0 k_{MR} = 112,5 \text{ mV}$$

1P

- b) Der Messbereich des Sensors ist wegen der  $2\varphi$ -Periodizität eine halbe Umdrehung, also  $\pi$  bzw.  $180^\circ$  (0,5P).

Mit zwei Brücken erzielt man einmal einen größeren Messbereich (eine Brücke nur  $90^\circ$ ) (0,5P) mit gleich bleibender Auflösung (0,5P) und zweitens ein Signal das unabhängig von Schwankungen der Versorgungsspannung und des MR-Koeffizienten (0,5P) (z. B. durch Temperaturänderungen) ist (s.u.).

2P

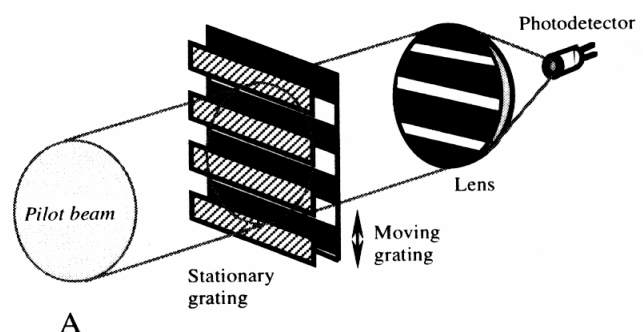
## Hausaufgabe 2: Analoge Auswertung inkrementaler Geber 6 Punkte

Inkrementale Geber (in der Abbildung am Beispiel eines Photodetektors) können zur Ortsbestimmung z.B. von Druckköpfen eingesetzt werden. Das Auflösungsvermögen kann dabei durch Auswertung der analogen Signale wesentlich erhöht werden.

- a) (2P) Welches Auflösungsvermögen ist bei einer Teilung (Rasterperiodizität) von 0,1 mm mit einem elektronischen Signalwandler der Auflösung  $2^4$  (4-bit) theoretisch möglich? Erklärung!

- b) (4P) Wie äußert sich eine Schwankung der Linienbreiten bzw. der Lampenhelligkeit im Hinblick auf das Auflösungsvermögen? Erläutern Sie diese Effekte und deren Auswirkungen anhand einer Skizze.

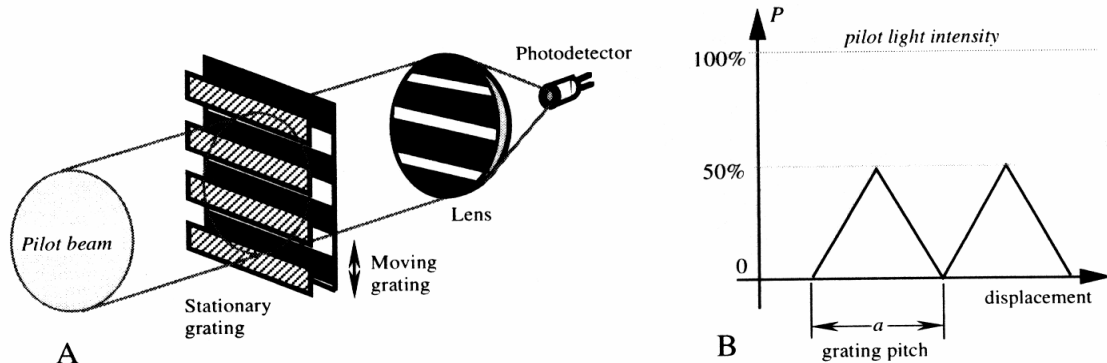
Welche Schlussfolgerungen ergeben sich für die Auslegung des Systems?





## Musterlösung

- a) Bei Voraussetzung eines idealen Gitters (Gitterbreiten gleich und konstant) ergibt sich der in der



Vorlesung gezeigte dreieckförmige Verlauf des Sensorsignals.

Die Ausdehnung eines Dreiecks in x-Richtung entspricht dabei einem Raster, d.h. eine Flanke des Dreiecks steigt von ihrem kleinsten bis zu ihrem größten Wert über  $\frac{1}{2}$  Rasterperiode auf (0,5P). Das Lichtintensitäts-Intervall von 0 bis 50% der Lampenhelligkeit wird mit dem Wandler verarbeitet (0,5P).

1P

Es folgt für das Auflösungsvermögen:

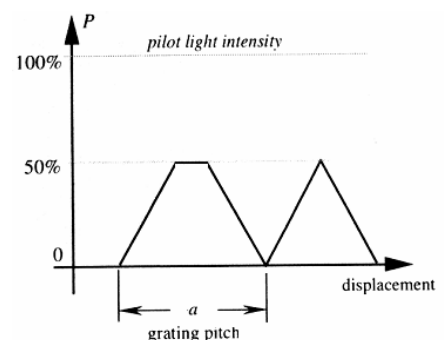
$$(0,1\text{mm}/2) / 2^4 = 3,125 \mu\text{m}$$

1P

- b) Schwankung der Linienbreiten :

Eine Schwankung der Linienbreiten äußert sich durch Ausbildung von Plateaus im Sensorsignal (0,5P).

Da diese Plateaus auf einem Intensitätswert liegen, liefert der Wandler auch entlang der x-Werte dieses Plateaus auch nur einen Wert. Das heißt es werden verschiedene x-Werte in einen Intensitätswert abgebildet, was natürlich die Auflösung vermindert (0,5P). Skizze (0,5P)

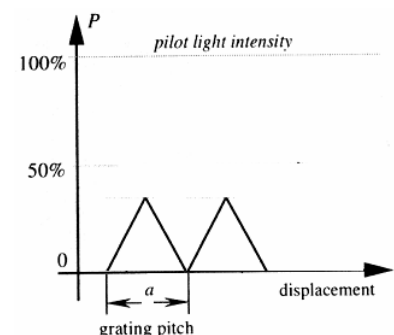


1,5P

### Verringerung der Lampenhelligkeit:

Durch Verringerung der Lampenhelligkeit wird die Spitze des Dreiecks zu kleineren Werten verschoben (0,5P).

Da der Wandler allerdings auf 50% der Lampenhelligkeit eingestellt wurde, bedeutet das, dass der Wandler nur noch zu einem Teil angesteuert wird, was sich ebenfalls in einer Reduktion der Auflösung äußert, es sei denn man macht zuvor einen Kalibrierlauf um die max. Helligkeit zu bestimmen (0,5P). Skizze (0,5P)



1,5P

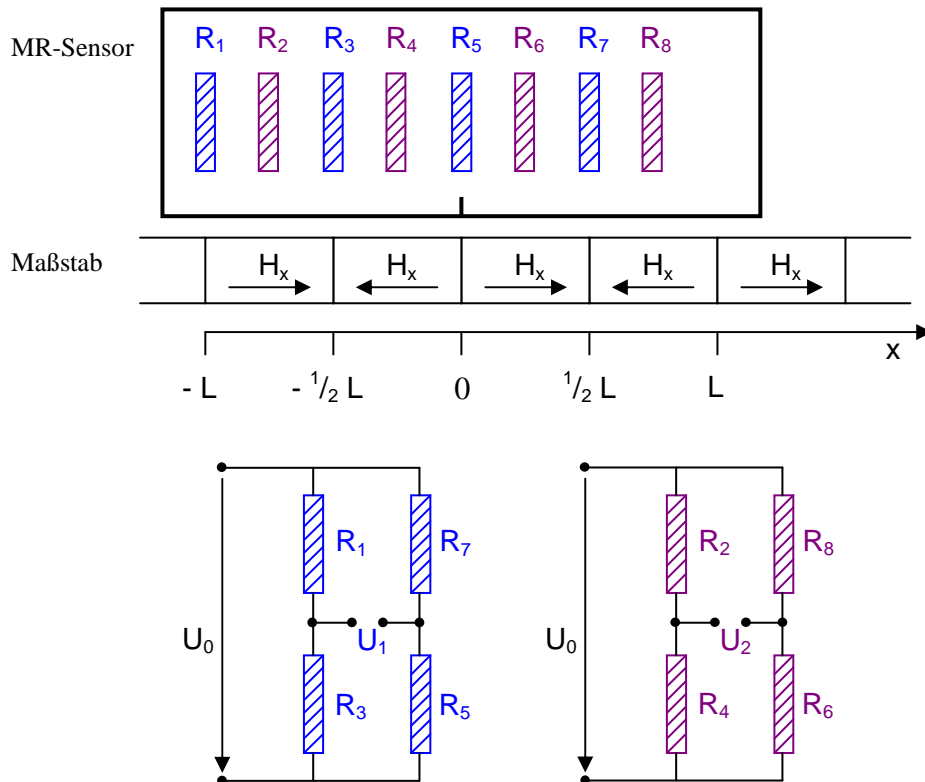
Aus diesen Ergebnissen lässt sich folgern, dass zur genauen Ortsbestimmung feine Gitter hoher Güte sowie nachgeschaltete Signalwandler mit großem Auflösungsvermögen benötigt werden.

1P

### Hausaufgabe 3: Wegmessung mit MR-Sensor

5 Punkte

Für eine hochauflösende Wegmessung wird der skizzierte MR-Sensor (feststehend), bestehend aus 8 MR-Widerstandselementen (MR-Koeffizient  $k_{MR} = 4 \%$ , Koerzitivfeldstärke  $H_k = 5 \text{ kA/m}$ ) mit Barberpolen, eingesetzt. Über den Sensor wird der ebenfalls skizzierte magnetische Maßstab (kleine Feldstärken) bewegt.



Für den Maßstab gilt:

$$H_x = \hat{H}_x \cdot \sin\left(2\pi \frac{x}{L}\right) \quad \text{mit } \hat{H}_x = 1 \frac{\text{kA}}{\text{m}} \quad \text{und } L = 200 \mu\text{m}$$

Die Position des Sensors soll relativ zum Maßstab differenziell gemessen werden.

Dazu werden die acht Widerstandselemente wie skizziert verschaltet.

- a) (3,5P) Geben Sie die Ausgangssignale der Brücken in Abhängigkeit von der Position  $x$  an und bestimmen Sie die Signalamplitude bei einer Brückenversorgungsspannung von  $U_0 = 5 \text{ V}$ . Warum werden zwei Brücken benötigt?

Hinweis: Benutzen Sie die Näherung für kleine Feldstärken  $R_i = R_{\text{mittel}} + \frac{\Delta R_{\text{max}}}{H_k} H_x$

- b) (1,5P) Skizzieren Sie den Signalverlauf beider Brücken für das Intervall  $[0; 0,5 \text{ mm}]$ ! Welche Wegauflösung erzielt die Anordnung?

a) Für kleine Feldstärken  $H_x$  gilt nach Vorlesung:

$$R_i = R_{\text{mittel}} + \frac{\Delta R_{\text{max}}}{H_k} H_x = R_{\text{mittel}} + \Delta R_{\text{max}} \frac{\hat{H}_x}{H_k} \cdot \sin\left(2\pi \frac{x + (i-1) \cdot L/4}{L}\right) = R_{\text{mittel}} + \Delta R_{\text{max}} \frac{\hat{H}_x}{H_k} \cdot \sin\left(2\pi \frac{x}{L} + (i-1) \frac{\pi}{2}\right)$$

Also:

$$R_{1,5} = R_{\text{mittel}} + \Delta R_{\text{max}} \frac{\hat{H}_x}{H_k} \cdot \sin\left(2\pi \frac{x}{L}\right), \quad R_{3,7} = R_{\text{mittel}} - \Delta R_{\text{max}} \frac{\hat{H}_x}{H_k} \cdot \sin\left(2\pi \frac{x}{L}\right)$$

und

$$R_{2,6} = R_{\text{mittel}} + \Delta R_{\text{max}} \frac{\hat{H}_x}{H_k} \cdot \cos\left(2\pi \frac{x}{L}\right), \quad R_{4,8} = R_{\text{mittel}} - \Delta R_{\text{max}} \frac{\hat{H}_x}{H_k} \cdot \cos\left(2\pi \frac{x}{L}\right), \quad \text{je 0,5 P}$$

Schließlich:

$$U_{\sin} = U_0 \cdot \frac{\Delta R}{R_{\text{mittel}}} = U_0 \cdot \underbrace{\frac{\Delta R_{\text{max}}}{R_{\text{mittel}}}}_{\approx k_{MR}} \frac{\hat{H}_x}{H_k} \cdot \sin\left(2\pi \frac{x}{L}\right)$$

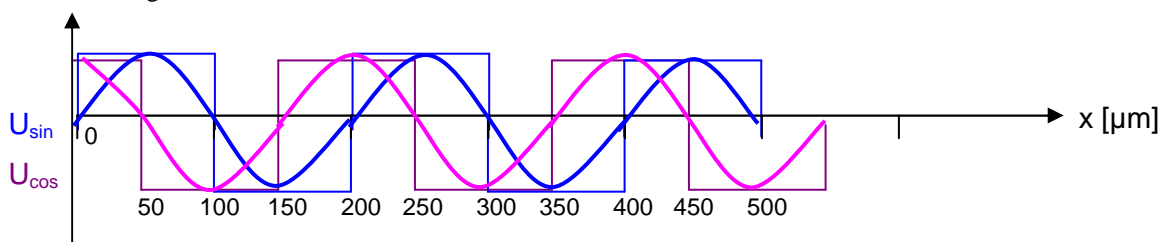
und

$$U_{\cos} = U_0 \cdot \frac{\Delta R}{R_{\text{mittel}}} = U_0 \cdot \underbrace{\frac{\Delta R_{\text{max}}}{R_{\text{mittel}}}}_{\approx k_{MR}} \frac{\hat{H}_x}{H_k} \cdot \cos\left(2\pi \frac{x}{L}\right) \quad \text{je 0,5P}$$

Die Signalamplitude ist in beiden Fällen also:

$$\hat{U} = U_0 \cdot \underbrace{\frac{\Delta R_{\text{max}}}{R_{\text{mittel}}}}_{\approx k_{MR}} \frac{\hat{H}_x}{H_k} = 5 \text{ V} \cdot 0,04 \cdot \frac{1 \frac{\text{kA}}{\text{m}}}{5 \frac{\text{kA}}{\text{m}}} = 40 \text{ mV} \quad 0,5 \text{ P}$$

Zwei Brückenschaltungen werden benötigt, um die Bewegungsrichtung erkennen zu können, mit nur einer Brücke ist das nicht möglich! 0,5P



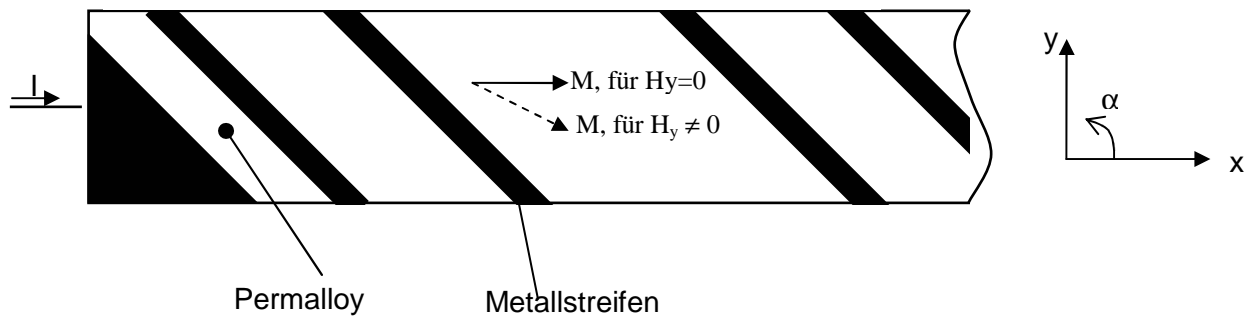
0,5P Skizze

Die erzielte Auflösung hängt von der Art der Digitalisierung ab und würde z.B. bei einem einfachen Komparator bei  $L/4 = 50 \mu\text{m}$  liegen, siehe Skizze. 0,5P

## Sonderaufgabe 1: Geflippter MR-Sensor mit Offsetspannung

Bei nicht exakt übereinstimmenden Brückenwiderständen zeigt ein MR-Sensor auch ohne äußeres Feld eine Spannung an, die sog. Offsetspannung.

- Wie groß ist die Offsetspannung einer Brücke mit  $R_1 = R_0 + \Delta R$  und  $R_{2,3,4} = R_0$ ?
- Zeigen Sie, dass bei Umkehrung der Magnetisierungsrichtung der MR-Schichten die durch den MR-Effekt hervorgerufene Signalspannung das Vorzeichen wechselt, während die Offset-Spannung gleich bleibt. Gehen Sie dazu von dem skizzierten MR-Streifen aus.

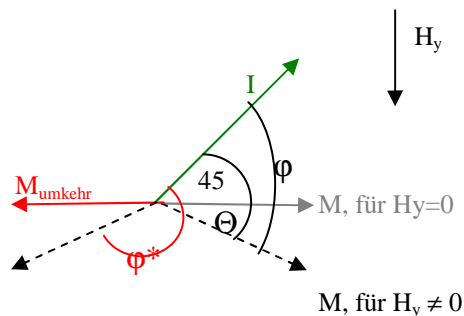


### Musterlösung: Geflippter MR-Sensor mit Offsetspannung

$$\begin{aligned}
 \text{a) } U_{\text{Offset}} &= U_0 \left( \frac{R_1}{R_1 + R_3} - \frac{R_2}{R_2 + R_4} \right) = U_0 \left( \frac{R_0 + \delta R}{2R_0 + \delta R} - \frac{R_0}{2R_0} \right) \\
 &= U_0 \frac{(R_0 + \delta R) \cdot 2R_0 - R_0 (2R_0 + \delta R)}{(2R_0 + \delta R) \cdot 2R_0} = U_0 \frac{\delta R \cdot 2R_0 - R_0 \cdot \delta R}{(2R_0 + \delta R) \cdot 2R_0} \\
 &= U_0 \frac{\delta R \cdot R_0}{(2R_0 + \delta R) \cdot 2R_0} \approx U_0 \frac{\delta R \cdot R_0}{4R_0^2} = \frac{1}{4} U_0 \frac{\delta R}{R_0}
 \end{aligned}$$

mit der Näherung  $2R_0 + \delta R \approx 2R_0$ .

- Geht man von einem MR-Streifen mit Magnetisierung in positiver x-Richtung wie im Bild gezeigt aus, so gilt mit  $\theta$  als Winkel zwischen x-Achse und M,  $\varphi$  als Winkel zwischen I und M:



$$\varphi = 45^\circ + \theta$$

Wird die Magnetisierungsrichtung umgedreht, so ist  $\varphi^* = 180^\circ + 45^\circ - \theta = 225^\circ - \theta$ , da ein Feld in negativer Richtung  $H_y$  die Magnetisierung M dann ebenfalls nach unten dreht.

Es gilt:  $R = R_{\max} - \Delta R_{\max} \cdot \sin^2(\angle(i, M))$ , hier:

$$\begin{aligned} R &= R_{\max} - \Delta R_{\max} \cdot \sin^2(\varphi) = R_{\max} - \Delta R_{\max} \cdot \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \cos(2 \cdot \varphi) \right] = \\ &= R_{\max} - \frac{1}{2} \cdot \Delta R_{\max} + \frac{1}{2} \cdot \Delta R_{\max} \cdot \cos(2 \cdot (45^\circ + \theta)) = R_{\text{mittel}} + \frac{1}{2} \cdot \Delta R_{\max} \cdot \cos(90 + 2 \cdot \theta) = \\ &= R_{\text{mittel}} - \frac{1}{2} \cdot \Delta R_{\max} \cdot \sin(2 \cdot \theta) \end{aligned}$$

Wird die Magnetisierung nun umgedreht bleiben alle Parameter unverändert, lediglich  $\varphi$  muss durch  $\varphi^*$  ersetzt werden.

$$\begin{aligned} R^* &= R_{\max} - \frac{1}{2} \cdot \Delta R_{\max} + \frac{1}{2} \cdot \Delta R_{\max} \cdot \cos(2 \cdot (225^\circ - \theta)) = R_{\text{mittel}} + \frac{1}{2} \cdot \Delta R_{\max} \cdot \cos(90 - 2 \cdot \theta) = \\ &= R_{\text{mittel}} + \frac{1}{2} \cdot \Delta R_{\max} \cdot \sin(2 \cdot \theta) \end{aligned}$$

Das bedeutet, dass Widerstandsänderungen durch ein Magnetfeld stets das jeweils entgegengesetzte Vorzeichen, also  $\Delta R^* = -\Delta R$  haben, und damit:

$$U_S^* = U_0 \frac{\Delta R^*}{R_0} = -U_0 \frac{\Delta R}{R_0}$$

Die Offsetspannung ändert ihr Vorzeichen nicht, wie man aus dem Ergebnis von a) sieht, bzw. durch Betrachtung des feldfreien Zustandes.

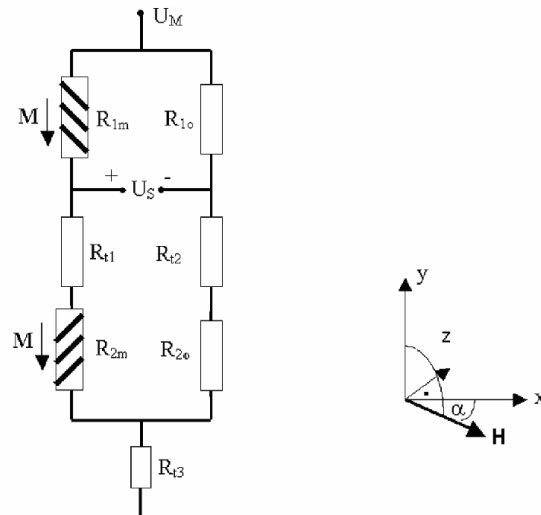
Das Gesamtsignal ist in erster Näherung  $U_{\text{ges}} \approx U_{\text{Offset}} + U_S$  und die Differenz beider Gesamtausgänge liefert dann:

$$U_{\text{ges}} - U_{\text{ges}}^* = U_{\text{Offset}} + U_S - (U_{\text{Offset}} + U_S^*) = 2 \cdot U_0 \cdot \frac{\Delta R}{R_0}$$

Die Differenz der Signalspannung mit jeweils entgegengesetzt magnetisiertem MR-Streifen ist also unabhängig vom Offset, damit ist auf dem Sensor eine Offset-Korrektur möglich. Die Umkehrung der Magnetisierung erfolgt durch einen weiteren Leiter, den Flipleiter, der unter der MR-Struktur senkrecht zu diesen verläuft. Ein Strom durch den Flipleiter erzeugt ein Magnetfeld in Streifenlängsrichtung, ist dieses groß genug und der Magnetisierung entgegengerichtet, so kehrt sich diese um.

## Sonderaufgabe 2: MR-Sensor-Messbrücke

Gegeben ist ein magnetoresistiver Magnetfeldsensor auf Permalloy-Basis (MR-Koeffizient = 3,9%), der als Halbbrücke aus den zwei MR-Widerständen  $R_{1m}$ ,  $R_{2m}$  (Magnetisierung und Barbpole wie unten gezeichnet) und den Festwiderständen  $R_{10}$  und  $R_{20}$  aufgebaut ist. Zum Abgleichen sind zusätzliche Trimmwiderstände  $R_{t1}$ ,  $R_{t2}$  und  $R_{t3}$  auf dem Chip aufgebracht.



Vor dem Abgleich (alle Trimmwiderstände haben einen Widerstand von  $0 \Omega$ ) weist der Sensor einen Offset von  $-63 \text{ mV}$  (bei  $U_M = 5,0 \text{ V}$ ) und eine Feldempfindlichkeit von  $9,75 \text{ mV/V} / \text{kA/m}$  auf.

- Schätzen Sie den Messbereich des Sensors ab.
- Durch Einstellung welches Trimmwiderstandes kann die Brücke abgeglichen werden? Auf welchen Wert muss dieser Widerstand getrimmt werden, wenn die vier Brückenwiderstände einen Nominalwert von  $R_0 = 1 \text{ k}\Omega$  haben?

*Hinweis: Nehmen Sie an, dass der Offset durch einen falschen Wert von  $R_{2m}$  hervorgerufen wird.*

- Auf welchen Wert muss der Trimmwiderstand  $R_{t3}$  abgeglichen werden, damit der Sensor eine Empfindlichkeit von  $6,25 \text{ mV/V} / \text{kA/m}$  aufweist?
- Welches Ausgangssignal erhält man jeweils bei Anlegen des skizzierten Magnetfeldes  $H$  ( $H = 1 \text{ kA/m}$ ,  $\alpha = 30^\circ$ ,  $U_M = 5 \text{ V}$ ) mit dem ungetrimmten und dem getrimmten Sensor?

## Lösung zu MR-Sensor Messbrücke

- Der Sensor misst die magnetische Feldstärke  $H$  in  $\text{kA/m}$ . Es gilt:

$$\text{Empfindlichkeit } S = (U_S / U_M) / H$$

Und, da es sich hier um eine Halbbrücke handelt:  $U_S / U_M = \frac{1}{2} \cdot \Delta R / R_0$

Der maximale Ausgangswert wird erreicht, wenn  $\Delta R / R_0$  maximal wird. Dabei gilt nach Vorlesung:

$$R_{im} = R_{mittel} \pm \frac{1}{2} \cdot \Delta R_{max} / R_0 \cdot \sin(2\theta) \quad \text{d.h. } (\Delta R / R_0)_{max} = \frac{1}{2} \cdot \Delta R_{max} / R_0$$

und:  $\Delta R_{max} / R_0 = 3,9 \% = k_{MR}$  (MR-Koeffizient),

$$\text{also: } H_{max} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot k_{MR} / S = \frac{1}{4} \cdot 3,9 \cdot 10^{-2} / \{9,75 \cdot 10^{-3} (\text{V/V}) / (\text{kA/m})\} = 1 \text{ kA/m}$$

Der Messbereich des Sensors ist also etwa  $-1 \text{ kA/m} \leq H \leq 1 \text{ kA/m}$ .

- Durch Trimmen des Widerstandes  $R_{t1}$  (da der Offset nach Annahme durch einen falschen, nämlich zu kleinen, Wert von  $R_{2m}$  hervorgerufen wird. Dabei ist das Vorzeichen der Offsetspannung und die angegebene Polung zu

beachten!).

→ wenn  $-63\text{mV}$  (also negativ) ist, dann kehren sich die Spannungspotentiale bzgl  $U_S$  um

→ Spannungsabfall an  $R_{2m}$  ist kleiner als bei Abgleich, wodurch das Potential am + von  $U_S$  heruntersetzt wird

→ das ist gleichbedeutend mit  $\frac{R_{2m}}{R_{1m} + R_{2m}} \downarrow \Rightarrow \frac{1}{\frac{R_{1m}}{R_{2m}} + 1} \Rightarrow \left(\frac{R_{1m}}{R_{2m}} + 1\right) \uparrow$  für  $R_{2m} \downarrow \Rightarrow R_{2m}$  ist zu

klein

→ damit der Widerstand im Pfad von  $R_{2m}$  wieder größer wird, kann man diesem Effekt durch Hochtrimmen von  $R_{t1}$  entgegenwirken.

Der Offset ergibt sich durch:  $U_{\text{Offset}} = U_M \cdot \{R_{2m}/(R_{1m} + R_{2m}) - R_{20}/(R_{10} + R_{20})\}$  (mit  $R_{10, 20, 1m} = R_0$ )

also:

$$R_{2m} = \frac{R_0}{\frac{2U_M}{2U_{\text{offset}} + U_M} - 1} = 951\Omega$$

Die Brückenspannung ist gleich Null, wenn gilt:  $\frac{R_{t1} + R_{2m}}{R_{1m}} = \frac{R_{t2} + R_{20}}{R_{10}}$

da  $R_{t2} = 0$  und  $R_{10, 20, 1m} = R_0$  sind, folgt:  $R_{t1} = R_0 - R_{2m} = 1\text{k}\Omega - 951\Omega = 49\Omega$

- c) Die Empfindlichkeit ist definiert durch:  $S = (U_S / U_M) / H$

Sie wird reduziert, wenn die Brückenspannung durch den Vorwiderstand  $R_{t3}$  kleiner wird:

$$S' = S_0 \cdot (U_{\text{Brücke}} / U_M) \text{ bzw. } U_M / U_{\text{Brücke}} = S_0 / S'$$

und außerdem gilt:  $U_{\text{Brücke}} / U_M = R_{\text{Brücke}} / (R_{t3} + R_{\text{Brücke}})$

und  $R_{\text{Brücke}} = (R_{1m} + R_{t1} + R_{2m}) \parallel (R_{10} + R_{20}) = 1\text{k}\Omega$

also  $R_{t3} = R_{\text{Brücke}} \cdot (U_M / U_{\text{Brücke}} - 1) = R_{\text{Brücke}} \cdot (S_0 / S' - 1) = 1\text{k}\Omega \cdot (9,75/6,25 - 1) = 444\Omega$

- d) Auf die MR-Sensoren wirkt nur das Feld in x-Richtung, hier also  $H_x = H \cdot \cos \alpha$ . Das Vorzeichen der Ausgangsspannung ergibt sich durch folgende Überlegung: Die ohne Feld in -y-Richtung zeigende Magnetisierung wird durch H in positiver x-Richtung verdreht. Die Stromrichtung wird für  $R_{1m}$  durch die Barbpole um  $45^\circ$  gegenüber der -y-Richtung in Richtung -x verdreht. D.h. die Magnetisierung wird durch das anliegende Feld H vom Strom weggedreht und damit verringert sich der Widerstand von  $R_{1m}$  (Widerstand minimal bei M senkrecht zu I). Für  $R_{2m}$  ergibt sich gegenläufiges Verhalten durch die andere Ausrichtung der Barbpole. Damit steigt insgesamt  $U_S$  im Magnetfeld an.

Damit ergibt sich allgemein:  $U_S = H_x \cdot S \cdot U_M + U_{\text{Offset}}$

Also für den ungetrimmten Sensor:  $U_S = \frac{1}{2} \sqrt{3} \cdot 9,75 \cdot 5 \text{ mV} - 63\text{mV} = -20,78\text{mV}$

und für den getrimmten Sensor:  $U_S = \frac{1}{2} \sqrt{3} \cdot 6,25 \cdot 5 \text{ mV} = 27,06\text{mV}$

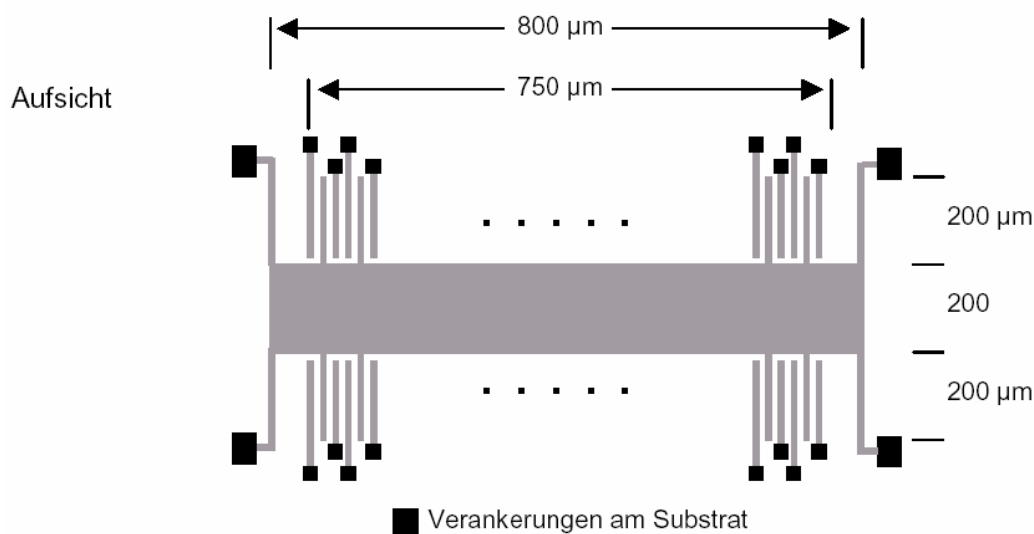
## Musterlösung zu Übung 5 zur Vorlesung Messtechnik I im SS 2006

Abgabe: KW 29, 22 Punkte

### Hausaufgabe 1: Beschleunigungssensor

9 Punkte

Unten ist schematisch die aus poly-Si hergestellte Sensorstruktur eines mikromechanischen Beschleunigungssensors dargestellt. Alle Komponenten dieser Struktur haben eine Dicke von  $10\text{ }\mu\text{m}$ . Die Elektrodenfinger (bewegliche und am Substrat verankerte) haben eine Breite von jeweils  $3\text{ }\mu\text{m}$ , der Luftspalt zwischen zwei Elektroden ist jeweils  $2\text{ }\mu\text{m}$  breit. Die vier Federn haben zusammen eine Federkonstante  $c$  von  $0,1\text{ N/m}$ .



- (1P) Erläutern Sie kurz das Funktionsprinzip des Beschleunigungssensors.
- (3P) Berechnen Sie die seismische Masse des Sensors. Ignorieren Sie dabei die Federn. Wie groß ist der Messbereich ohne Kompensationsbetrieb maximal?  
Dichte von poly-Si:  $\rho_{\text{Si}} = 2,32\text{ g/cm}^3$
- (1P) Wie groß sind die beiden Sensorkapazitäten im Ruhezustand?
- (1P) Wie groß ist die Empfindlichkeit des Sensors in  $\text{mV/g}$  bei Raumtemperatur ( $20^\circ\text{C}$ ), wenn die zur Messung verwendete Kapazitätsbrücke ein Signal liefert mit  $U_s = k \cdot (C_1 - C_2) / (C_1 + C_2)$  mit  $k = 100\text{ mV}$ ?
- (2P) Zur Beschleunigungskompensation werden auf jeder Seite 10 Elektroden genutzt. Welche externe Beschleunigung kann durch Anlegen einer Spannung von  $15\text{ V}$  an diesen Elektroden kompensiert werden?
- (1P) Im Bereich von  $-40^\circ\text{C}$  bis  $+90^\circ\text{C}$  hat die Empfindlichkeit einen Temperaturkoeffizienten von  $\text{TK} = -5 \cdot 10^{-4}\text{ 1/K}$ . Wie groß sind der absolute und der relative Fehler des Sensorausgangssignals bei einer Beschleunigung von  $50g$  und  $\vartheta = +50^\circ\text{C}$ ?



- a) Eine Beschleunigung  $a$  in Längsrichtung der seismischen Masse bewirkt eine Kraft von  $F = m \cdot a$ , die von der Federkraft  $F = c \cdot x$  kompensiert wird, also  $x = m/c \cdot a$ . Die Auslenkung  $x$  wird durch die Kapazitätsänderung der beiden von festen und beweglichen Elektroden gebildeten Kapazitäten gemessen. 1P

- b) Die seismische Masse setzt sich zusammen aus dem oben grau gezeichneten Quader (Volumen  $800 \cdot 200 \cdot 10 \mu\text{m}^3$ ) und den Fingern der beweglichen Elektroden (Volumen  $3 \cdot 200 \cdot 10 \mu\text{m}^3$ ). Von diesen beweglichen Elektrodenfingern gibt es insgesamt 100, da eine Elektrodengruppe (feste Elektrode links – Spalt – bewegliche Elektrode – Spalt – feste Elektrode rechts – Spalt) jeweils  $15 \mu\text{m}$  breit ist, auf jeder Seite sind also  $750/15 = 50$  Gruppen. Also:

$$m = \rho_{\text{Si}} \cdot V = \rho_{\text{Si}} \cdot (V_{\text{Quader}} + 100 \cdot V_{\text{Finger}}) = 2,32 \text{ g/cm}^3 \cdot (1,6 \cdot 10^{-6} \text{ cm}^3 + 100 \cdot 6 \cdot 10^{-9} \text{ cm}^3) = 5,1 \mu\text{g} \quad 1,5P$$

Der maximale Messbereich ergibt sich aus dem Abstand der Elektroden ( $d = 2 \mu\text{m}$ ), die die Auslenkung begrenzen, der Federkonstante und der seismischen Masse:

$$d > x = F/c = m/c \cdot a, \text{ also } a < d \cdot c/m = 2 \cdot 10^{-6} / (10 \cdot 10^{-6} \cdot 5,1 \text{ Nm/mg}) = 2000/51 \text{ N/kg} = 39,22 \text{ m/s}^2 = 4 \cdot g$$

1,5P

- c) Die zwei Sensorkapazitäten (jeweils von den beweglichen Elektroden nach links und nach rechts zu den benachbarten feststehenden Elektroden) lassen sich als Plattenkondensatoren berechnen. Jede Gruppe bildet zwei Kapazitäten, insgesamt gibt es 100 Gruppen (s.o.):

$$C = N \cdot \epsilon \cdot \epsilon_0 \cdot A/d = 100 \cdot \epsilon \cdot \epsilon_0 \cdot (h \cdot l)/d = 100 \cdot 8,854 \cdot 10^{-13} \text{ F} = 0,885 \text{ pF} \quad 1P$$

Mit  $\epsilon = 1$  (da Vakuum),  $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$ ,  $h = 10 \mu\text{m}$ ,  $l = 200 \mu\text{m}$  und  $d = 2 \mu\text{m}$ .

- d) Für die Plattenkondensatoren gilt jeweils bei einer Auslenkung der seismischen Masse um  $x$ :

$$C_1 = \epsilon \cdot \epsilon_0 \cdot A/(d-x) \text{ und } C_2 = \epsilon \cdot \epsilon_0 \cdot A/(d+x),$$

dann gilt:

$$(C_1 - C_2) / (C_1 + C_2) = [1/(d-x) - 1/(d+x)] / [1/(d-x) + 1/(d+x)] = \dots = 2x/2d = x/d \quad 1P$$

$$\text{Mit } x = m/c \cdot a \text{ ist damit } U_s = k \cdot x/d = [(k \cdot m) / (c \cdot d)] \cdot a$$

Die Empfindlichkeit des Sensors ist also

$$S = U_s/g = 9,81 \cdot U_s/a = 9,81 \cdot (k \cdot m) / (c \cdot d) = 9,81 \cdot 0,1 \cdot 5,1 \cdot 10^{-9} \cdot (10 \text{ m} \cdot 10^6) / (N \cdot 2 \cdot \text{m}) = 25 \text{ mV/g} \quad 1P$$

- e) Die Anziehungskraft, die bei dem Anlegen einer elektrischen Spannung an einem Kondensator wirkt, beträgt  $F_{\text{el}} = \frac{1}{2} \cdot C' \cdot U^2/d$ . Da hier nur 20 statt wie oben 100 Elektrodengruppen wirksam sind, ist die Kapazität  $C'$  der Struktur nur  $1/5$  der oben berechneten Sensorkapazität. 1P

Die bei Anlegen von  $15 \text{ V}$  resultierende elektrostatische Kraft soll nun die durch eine Beschleunigung  $a$  hervorgerufene Kraft kompensieren, d.h.  $F_{\text{el}} = F_{\text{Beschleunigung}} = m \cdot a$ ; also

$$a = F_{\text{el}}/m = \frac{1}{2} \cdot C' \cdot U^2/(d \cdot m) = (0,885 \cdot 10^{-12} \cdot (15)^2 \cdot 10^3) / (2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 10^{-6} \cdot 5,1 \cdot 10^{-6}) = 1952 \text{ m/s}^2 = 200 \cdot g$$

1P

- f) Absoluter Fehler:  $\Delta S = S_0 \cdot \Delta \vartheta \cdot TK = 25 \text{ mV/g} \cdot 30 \text{ }^\circ\text{C} \cdot -5 \cdot 10^{-4} \text{ 1/K} = -0,4 \text{ mV/g}$

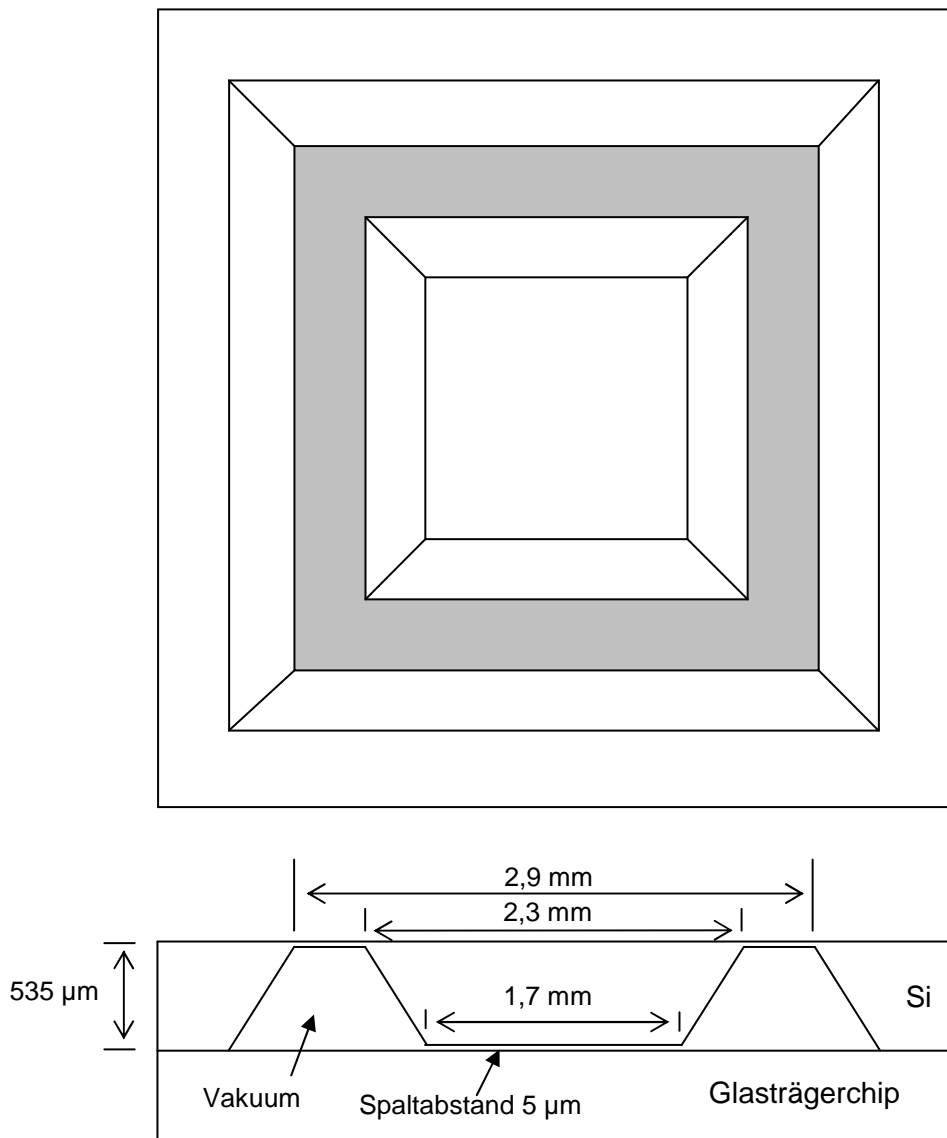
$$\text{Relativer Fehler: } \Delta S/S_0 = -0,4 \text{ mV/g} / 25 \text{ mV/g} = 1,6\%$$

1P

## Hausaufgabe 2: Mikromechanischer Drucksensor

7 Punkte

Gegeben sei ein piezoresistiver Drucksensor in Siliziumtechnologie mit Verstärkung der quadratischen Membran durch eine so genannte Bossstruktur, siehe Abbildung.



- (1P) Um welche Art von Drucksensor handelt es sich bei dem abgebildeten Typ? Begründung!
- (1P) Worin liegt der Vorteil dieser Sensorauslegung im Vergleich zu einem Sensor gleicher Abmessung ohne Bossstruktur? Begründung!
- (4P) Können Beschleunigungen senkrecht zur Chipfläche das Messergebnis verfälschen? Schätzen Sie dazu ab, wie groß die Beschleunigung sein müsste, damit ein gleich großes Signal entsteht wie bei einem Druck von 1 bar!

(Dichte von Si:  $\rho_{\text{Si}} = 2,32 \text{ g/cm}^3$ )

- d) (1P) Erläutern Sie eine Möglichkeit, dieses Sensorelement für den Einsatz in aggressiven Medien zu modifizieren!

## MUSTERLÖSUNG

- a) Um einen Absolutdrucksensor: der externe Druck wird gegen das Vakuum im Inneren des Sensors gemessen. 1 P
- b) In der höheren Überdruckfestigkeit der Sensorstruktur, da sich die Sensorstruktur bei hohen Drücken auf dem Glasträgerchip abstützt. 1 P
- c) Im Prinzip lenken Beschleunigungen senkrecht zur Chipfläche die Membran ebenfalls aus, so dass ein Signal wie bei Druckbelastung entsteht. Allerdings ist die Querempfindlichkeit sehr gering, denn bei einem Druck von 1 bar wirkt auf die Membran eine Kraft von  $F_{\text{Druck}} = p \cdot A_M$  ( $A_M$ : Membranfläche  $\approx (2,9 \text{ mm})^2$  eher etwas weniger als Kantenlänge)

Die durch eine Beschleunigung  $a$  hervorgerufene Kraft  $F_B$  ist:

$F_B = m \cdot a = V \cdot \rho \cdot a$ , d.h. die Beschleunigung, die die gleiche Auslenkung hervorruft, wie ein Druck von einem bar, ergibt sich durch gleichsetzen von  $F_B$  und  $F_D$ :

$$F_B = F_D \rightarrow m \cdot a = V \cdot \rho \cdot a = p \cdot A_M \rightarrow a = F_D / (V \cdot \rho) = p \cdot A_M / (V \cdot \rho)$$

Das Volumen der seismischen Masse lässt sich als Quader mit quadratischer Grundfläche der Kantenlänge 2,0 mm und der Höhe 0,53 mm annähern. Einsetzen mit  $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa} = 10^5 \text{ kg/(m} \cdot \text{s}^2)$  liefert:

$$a = 10^5 \text{ kg/(m} \cdot \text{s}^2) \cdot 2,9^2 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 / \{(2,0^2 \cdot 0,53) \cdot 10^{-9} \text{ m}^3 \cdot 2,32 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3\} = 170990 \text{ m/s}^2$$

D.h. um ein Signal zu erzeugen wie bei einer Druckbelastung von 1 bar, müsste eine Beschleunigung von rund  $170.990 \text{ m/s}^2$  (also etwa  $17.430 \text{ g}$ ) auf den Sensor einwirken. Damit ist der Sensor praktisch nicht querempfindlich gegenüber Beschleunigungen. 4 P

- d) Das Sensorelement wird dazu in ein Edelstahlgehäuse eingebaut. Zwischen Sensormembran und Edelstahlmembran befindet sich Silikon-Öl als Kraftvermittler. Der zu messende Druck wird dann von der Edelstahlmembran über das Öl auf die Siliziumoberfläche des Sensors geleitet.

1 P

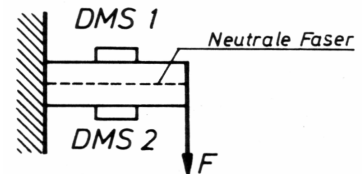
## Hausaufgabe 3: Dehnungsmessstreifen

5 Punkte

### Zwei Messstreifen

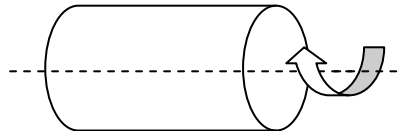
Zur Messung der Biegung eines Biegebalkens sind zwei Dehnungsmessstreifen wie skizziert an diesem angebracht.

- (1P) Wie müssen bei nebenstehender Messanordnung die DMS in einer Messbrücke verschaltet sein?
- (1P) Nach welcher Gleichung kann die Brückenausgangsspannung berechnet werden?



### Vier Messstreifen

Zur Messung von Drehmomenten sollen vier aktive DMS auf der unten skizzierten Welle angebracht werden.



- (2P) Wie sind die Dehnungsmessstreifen auf der Welle zu befestigen? Begründen Sie und fertigen Sie eine Skizze an!
- (1P) Wie sind die DMS in einer Vollbrücke zu verschalten?

## Musterlösung zu Aufgabe: Piezoresistiver Effekt - Dehnungsmessstreifen

- Da in gleichen Abständen zur neutralen Faser die gleiche Verformung auftritt, diese sich allerdings einmal als Stauchung und einmal als Dehnung äußert, sind die Dehnungen der beiden Streifen betragsmäßig gleich groß. Die Verschaltung erfolgt in einem Brückenweig, also seriell. 1P

b)

Treten Spannungen in allen Brückenweigen auf, so gilt die Formel:

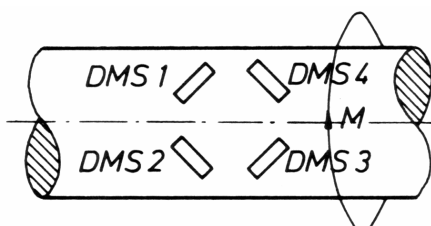
$$U_A = U_E \frac{k}{4} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 + \varepsilon_4)$$

Hier sind die Spannungen DMS1 und DMS2 betragsmäßig gleich, in den Widerständen 3 und 4 treten keine Spannungen auf.

$$U_A = U_E \frac{k}{4} [\varepsilon - (-\varepsilon)] = U_E \frac{k}{2} \varepsilon$$

1P

- Die DMS müssen wie skizziert im Winkel von 45° zur Wellenachse angebracht werden:



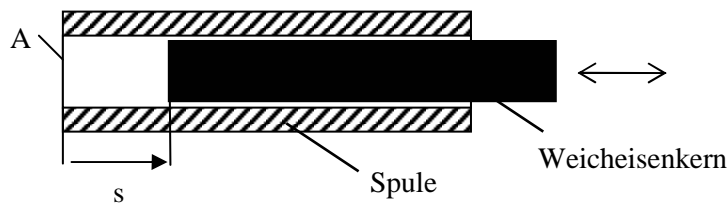
1P

Um zu erkennen, wie die Messstreifen in der Brücke verschaltet werden, kann man sich die Welle als gewrongenes Handtuch vorstellen. Ein weiteres Verdrehen führt dazu, dass DMS 1 und 3 gedehnt und DMS 2 und 4 gestaucht werden. Das bedeutet, DMS 1 und 3 werden gleichsinnig ebenso wie DMS 2 und 4 beeinflusst. 1P

- c) Die gleichsinnig beeinflussten Elemente werden diagonal in einer Brücke Verschaltet. 1P

## Sonderaufgabe 1: Induktiver Tauchanker-Aufnehmer

Folgendes Bild zeigt den prinzipiellen Aufbau eines Tauchanker-Aufnehmers:



Der magnetische Widerstand der Tauchkernspule ( $N = 25$ ) ist

$$R_m = \frac{s_{Fe}}{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot A_{Fe}} + \frac{s_a}{\mu_0 \cdot A_a} + \frac{s}{\mu_0 \cdot A}, \text{ mit der Weglänge } s \text{ der magnetischen Feldlinien, der}$$

Permeabilitätszahlen  $\mu_0$  und  $\mu_r$ , und der Querschnittsfläche  $A$  (Indizes: Fe: Weicheisen, a: außerhalb der Spule).

- (1P) Wie ist das Funktionsprinzip des Tauchanker-Aufnehmers? Wieso können die ersten beiden Terme vernachlässigt werden?
- (1P) Der Tauchanker einer Spule mit einem Durchmesser von 2,5 mm wird von  $s = 10$  mm auf 11 mm herausgezogen. Wie groß ist die absolute und die relative Änderung der Induktivität der Spule?
- (1P) Wie groß ist die Empfindlichkeit der Spule im Arbeitspunkt ( $s = 10$  mm)?

## MUSTERLÖSUNG : Tauchanker-Aufnehmer

- Die Induktivität der Spule steigt mit dem Eindringen des Tauchkerns. Der magnetische Widerstand im Eisen ist wegen der hohen relativen Permeabilitätszahl vernachlässigbar, und der Anteil im Außenbereich wegen der großen Fläche  $A_a$ . 1P

$$L = \frac{\mu_0 \cdot A \cdot N^2}{s} \Rightarrow L_1 = \frac{1,256 \cdot 10^{-6} \frac{V \cdot s}{A \cdot m} \cdot \pi \cdot \left(\frac{2,5mm}{2}\right)^2 \cdot 625}{10mm} = 0,385 \mu H$$

$$b) \quad L_2 = \frac{1,256 \cdot 10^{-6} \frac{V \cdot s}{A \cdot m} \cdot \pi \cdot \left(\frac{2,5mm}{2}\right)^2 \cdot 625}{11mm} = 0,35 \mu H$$

$$\Delta L = |L_2 - L_1| = 0,035 \mu H$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta L}{L} = \frac{\left(\frac{1}{s_1} - \frac{1}{s_2}\right)}{\frac{1}{s_1}} = \frac{s_2 - s_1}{s_2} = \frac{1}{11} = 9\%$$

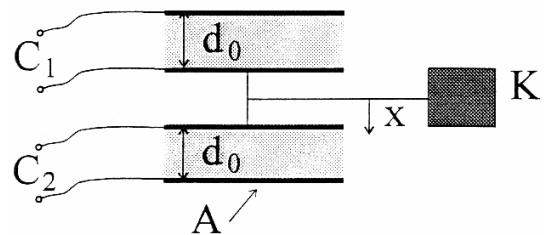
$$c) \quad S = \frac{dL}{ds} = -38,5 \mu H / mm$$

1P

1P

## Sonderaufgabe 2: Kapazitive Längenmessung

Mit der skizzierten Anordnung soll die Position des Körpers K gemessen werden. Dabei wird davon ausgegangen, dass sich dieser Körper nur eindimensional in x-Richtung bewegen kann. Es kann weiterhin angenommen werden, dass die Platten der beiden Kondensatoren immer parallel bleiben, also bei der Verschiebung nicht verkippen. Die Dielektrizitätszahl des verwendeten Dielektrikums sei  $\epsilon_r = 5$ , der Abstand der Platten sei  $d_0$  und die Fläche der Platten sei A.



- a) Geben Sie die Kapazitäten  $C_1$  und  $C_2$  als Funktion der Verschiebung an. Warum ist dieser Differentialkondensator besser als ein Aufbau mit nur einem Kondensator?

*Hinweis: Betrachten Sie das Verhältnis  $(C_1 - C_2) / (C_1 + C_2)$*

- b) Um die Verschiebung  $x$  zu messen, sollen die beiden Kondensatoren so in einer Brücke verschaltet werden, dass die gemessene Brückenspannung  $U_d(x)$  linear von der Länge  $x$  abhängt. Skizzieren Sie eine entsprechende Brückenschaltung und berechnen sie  $U_d(x)$ .
- c) Wie groß ist die Empfindlichkeit des oben skizzierten Längenmessers mit Brückenschaltung in Abhängigkeit von den angegebenen Größen?

### Musterlösung:

- a) Aus der allgemeinen Formel für Plattenkondensatoren ergibt sich:

2x 0,5P

$$C_1 = (\epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot A) / (d_0 + x)$$

$$C_2 = (\epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot A) / (d_0 - x)$$

Im Vorgriff auf Teilaufgabe b) wird das Verhältnis der Kapazitäten betrachtet. Es ergibt sich ein linearer

Zusammenhang zwischen der Brückenspannung und der Wegänderung. 1P

Weiterhin kürzen sich die Permittivitäten und die Querschnittsflächen weg, so dass man unabhängig von Umgebungsänderungen oder Material zwischen den Platten wird. 1P

b) Brückenschaltung:  $R_1=C_1$ ,  $R_2=C_2$ ,  $R_3=R$ ,  $R_4=R$ .

1P + Skizze : 1P

Es ergibt sich  $u_D(x) = -u_0/2 \cdot x/d_0$

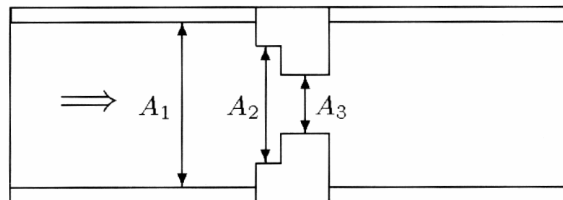
1P

c)  $E = du_D/dx = -u_0/2d_0$

1P

### Sonderaufgabe 3: Durchflussmessung

Zur Durchflussmessung wird die skizzierte Blende in eine Rohrleitung eingebracht. Gegeben ist die Rohrquerschnittsfläche  $A_1$  und die Blendenflächen  $A_2$  und  $A_3$ . Das Medium ist Wasser, seine Dichte  $\rho$  ist bekannt. Direkt vor der Blende wird der Druck  $p_1$  und direkt dahinter der Druck  $p_3$  gemessen.



- Leiten Sie den Volumenfluss abhängig von  $p_1$ ,  $p_3$  und weiteren Größen her.
- Wie groß ist der durch den Aufnehmer bedingte Druckverlust im Medium?
- Knapp vor dem Aufnehmer soll eine Armatur eingebaut werden. Welche Folgen hätte dies für die Messung.
- Aus konstruktiven Gründen muss der Aufnehmer für  $p_3$  in einem größeren Abstand von der Blende angebracht werden. Wie ändert sich das Messergebnis qualitativ? Welche Druckaufnehmer sind für diesen Fall auszuwählen?
- Alternativ könnte ein Ultraschallaufnehmer eingesetzt werden. Welche Vor- bzw. Nachteile hat er gegenüber dem oben betrachteten Messprinzip?

### MUSTERLÖSUNG zu Sonderaufgabe 4

- Bernoulli-Gleichung

$$p_1 + \frac{\rho \cdot v_1^2}{2} = p_3 + \frac{\rho \cdot v_3^2}{2}$$

$$\Rightarrow \Delta p = p_1 - p_3 = \frac{\rho}{2} \cdot (v_3^2 - v_1^2)$$

$$v_3^2 = \frac{2}{\rho} \cdot (p_1 - p_3) + v_1^2$$

Kontinuitätsgleichung

$$\begin{aligned}
 A_1 \cdot v_1 &= A_3 \cdot v_3 \\
 \Rightarrow v_1 &= \frac{A_3}{A_1} \cdot v_3 \\
 \Rightarrow v_3^2 &= \frac{2}{\rho} \cdot (p_1 - p_3) + \left( \frac{A_3}{A_1} \right)^2 \cdot v_3^2 \\
 \Rightarrow v_3 &= \frac{1}{\sqrt{1 - \left( \frac{A_3}{A_1} \right)^2}} \cdot \sqrt{\frac{2}{\rho} \cdot (p_1 - p_3)}
 \end{aligned}$$

ergibt sich dann der Volumenstrom,

$$\begin{aligned}
 Q_V &= \frac{dV}{dt} = A \cdot v \\
 Q_V &= A_3 \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left( \frac{A_3}{A_1} \right)^2}} \cdot \sqrt{\frac{2}{\rho} \cdot (p_1 - p_3)}
 \end{aligned}$$

- b) Der Druckverlust beläuft sich auf  $p_1 - p_3$ .
  - c) Die Armatur verursacht eine Wirbelbildung welche die Einlaufstrecke des Sensors stört. Der Druck  $p_1$  wird dadurch falsch gemessen.
  - d) Man erhält einen zusätzlichen Druckverlust zwischen Blende und Messstelle, daher wird ein zu kleiner  $p_3$ -Wert gemessen, also ein zu großer Volumenstrom bestimmt. Man wählt zwei Absolutdruckaufnehmer aus, damit lange Schläuche (tote Säcke) in der  $\Delta p$  Messung vermieden werden.
  - e) Vorteile:
    - kein oder nur geringer bleibender Druckverlust
    - keine  $\rho$ -Bestimmung
- Nachteile:
- aufwändige Auswertung der Messergebnisse im Messsystem
  - Empfindlich gegen Verschmutzung und Luftblasen
  - teuer