Министерство образования Российской Федерации
Московский государственный горный университет
Кафедра электротехники

РАСЧЕТ ЦЕПЕЙ ПОСТОЯННОГО ТОКА

Методические указания к самостоятельной работе по ТОЭ для студентов специальности 180400 –«Электропривод и автоматика промышленных установок и технологических комплексов»

Москва 2002

Содержание

Настоящее пособие предназначено для самостоятельной работы студентов при изучении раздела «Цепи постоянного тока» курса Теоретические основы электротехники. Содержатся варианты первого расчетно-графического задания, приводятся примеры решения задач, позволяющие освоить основные методы расчета электрических цепей.

1. ВВЕДЕНИЕ

Введем обозначения величин и элементов цепей постоянного тока, а также определим основные понятия, необходимые при работе с данным разделом электротехники.

Электрическая цепь – совокупность устройств, обеспечивающих путь для тока, процессы в которых полностью определяются понятиями ток, напряжение и ЭДС.

Электрический ток (проводимости) – направленное движение заряженных частиц.

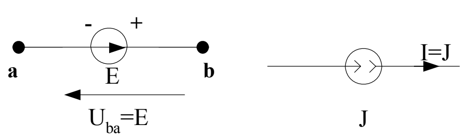
Напряжение – разность потенциалов между двумя точками.

Потенциал – работа по переносу единичного, положительного заряда из бесконечно удаленной точки (или любой другой точки, потенциал которой принимается равным нулю) в данную точку поля.

ЭДС – разность потенциалов, обусловленная сторонними силами (неэлектрической природы).

Электрической схемой с сосредоточенными параметрами называется изображение модели реального электрического устройства, свойства которого описываются при помощи идеализированных элементов.

Элементами электрической цепи постоянного тока являются источники электрической энергии: источники постоянной ЭДС (рис.1.1 а) и источники постоянного тока (рис.1.1б) и приемники электрической энергии, обозначающиеся на схемах, как резистивные элементы (рис. 1.2).Элементы цепи соединяются между собой проводами, сопротивление которых пренебрежимо мало, и образуют такие участки цепи, как ветви, узлы, контуры.



а) б)

рис. 1.1

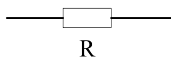


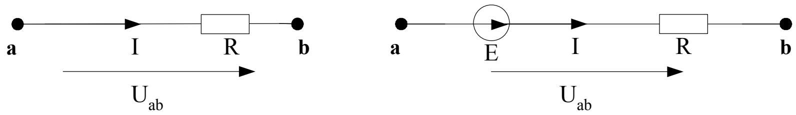
рис. 1.2

Количественной характеристикой электрического тока является сила тока (обозначается I), равная электрическому заряду, проходящему через сечение проводника в единицу времени. Если эта величина не меняется с течением времени, мы говорим о постоянном токе и цепях постоянного тока. За направление электрического тока принимается движение положительных зарядов. Поэтому ток в электрической цепи направлен из точки с большим потенциалом в точку с меньшим потенциалом. При решении задач, в которых нужно найти токораспределение, направление тока в ветвях схемы выбирается произвольно. И если сила тока получилась отрицательной, значит, положительные заряды движутся в направлении обратном выбранному.

Напряжение $U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b = -U_{ba}$. Направлением его считается направление от первого индекса ко второму (от a к b). Если $\varphi_a > \varphi_b$, то значение напряжения U_{ab} будет положительным.

При решении задач анализа электрических цепей (задач, в которых нужно найти значения напряжений или токов при заданных параметрах схемы) используются основные законы, такие как закон Ома и Законы Кирхгофа.

Закон Ома. Ток на участке цепи прямо пропорционален напряжению, приложенному к участку и обратно пропорционален сопротивлению этого участка.



$U_{ab} = IR$ $\qquad\qquad$ $U_{ab} = IR - E$

рис. 1.3

1-й закон Кирхгофа. Сумма токов, втекающих в узел равна сумме сил токов, вытекающих из узла.

2-й закон Кирхгофа. Сумма падений напряжений вдоль замкнутого контура равна сумме ЭДС, входящих в данный контур. При этом если направление ЭДС или напряжения на каком-либо элементе не совпадает с направлением обхода контура, то вклад соответствующих слагаемых будет отрицательным.

2. ВАРИАНТЫ ДОМАШНИХ ЗАДАНИИЙ

2.1.ЗАДАНИЕ

Для цепи, изображенной на рисунке, в соответствии с номером варианта:

1. Рассчитать токи во всех ветвях методом контурных токов.
2. Рассчитать токи во всех ветвях методом узловых потенциалов.
3. Рассчитать ток в любой ветви, содержащей источник ЭДС методом эквивалентного генератора.
4. Определить величину и полярность напряжения между точками m и n.
5. Построить потенциальную диаграмму напряжений по контуру, содержащему два источника ЭДС.

2.2. СХЕМЫ К ВАРИАНТАМ ДОМАШНЕГО ЗАДАНИЯ

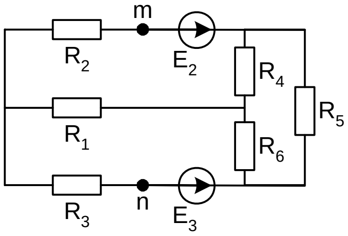


рис.2.1

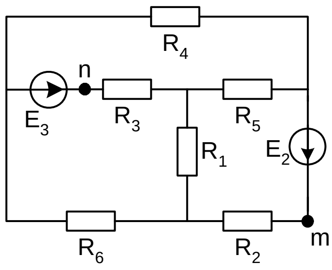


рис.2.2

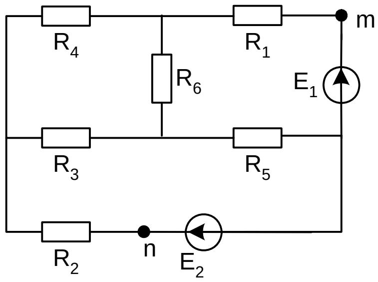


рис.2.3

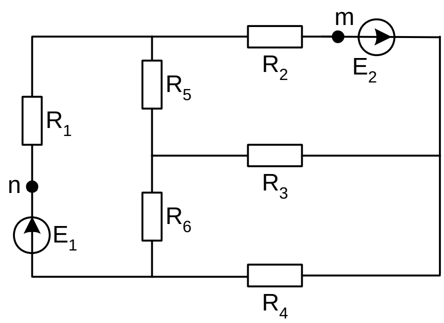


рис.2.4

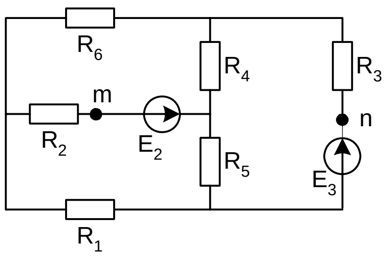


рис.2.5

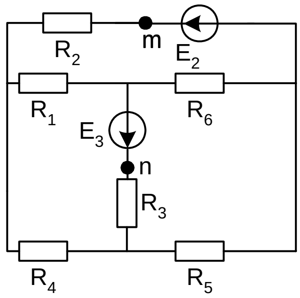


рис.2.6

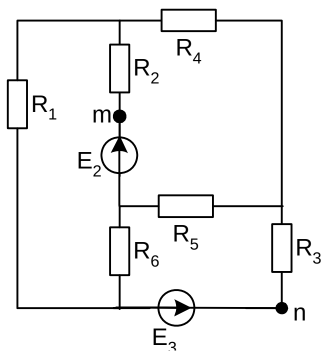


рис.2.7

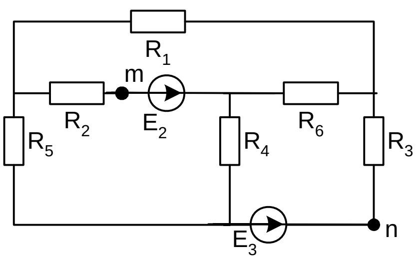


рис.2.8

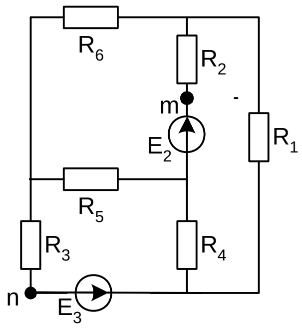


рис.2.9

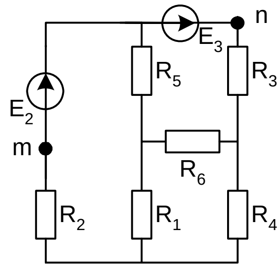


рис.2.10

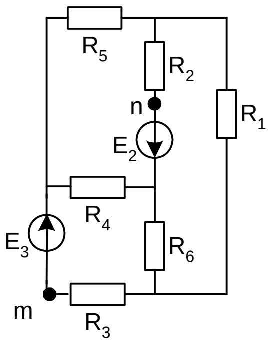


рис.2.11

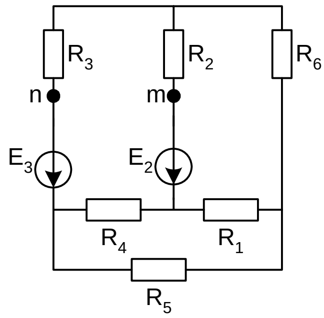


рис.2.12

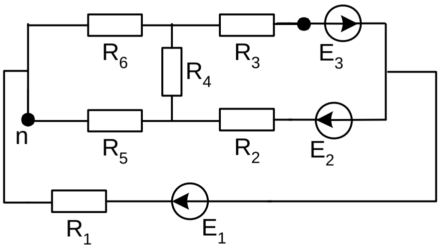


рис.2.13

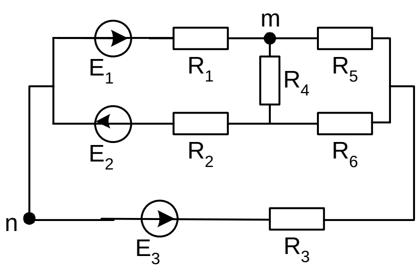


рис.2.14

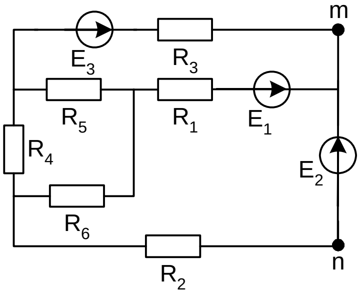


рис.2.15

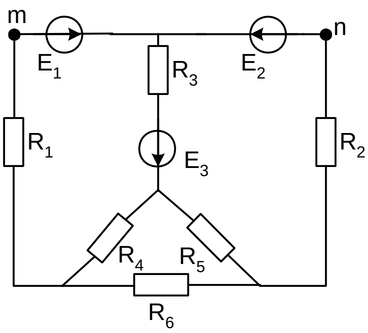


рис.2.16.

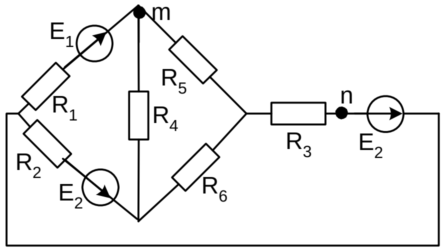


рис.2.17

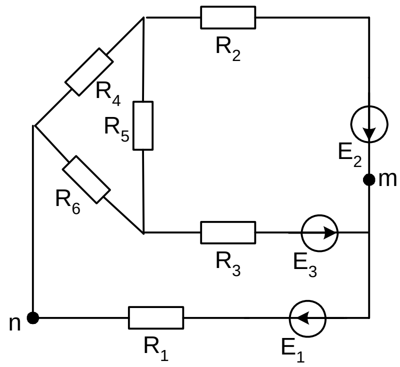


рис.2.18

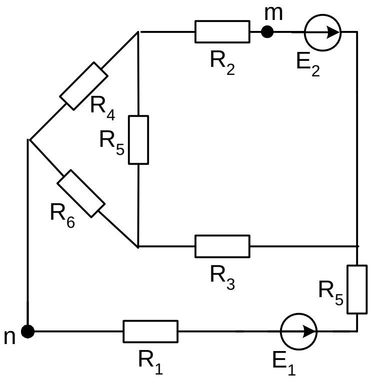


рис.2.19

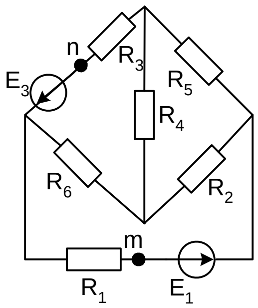


рис.2.20

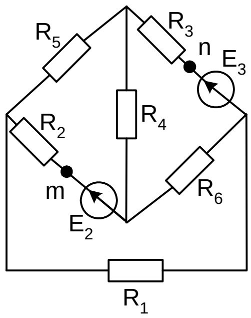


рис.2.21

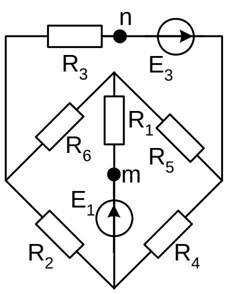


рис.2.22

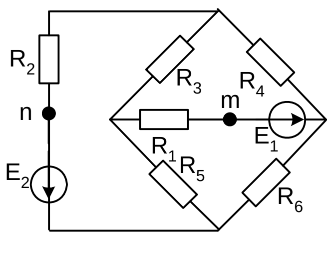


рис.2.23

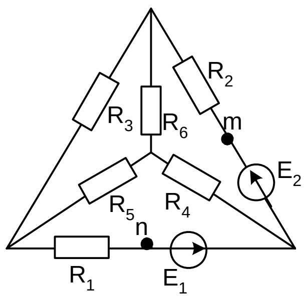


рис.2.24

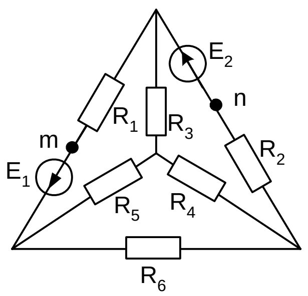


рис.2.25

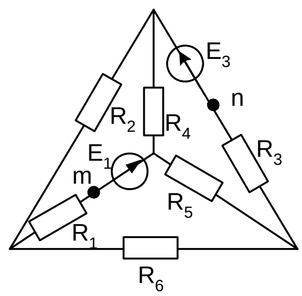


рис.2.26

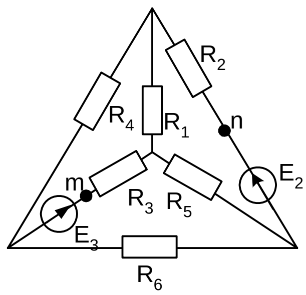


рис.2.27

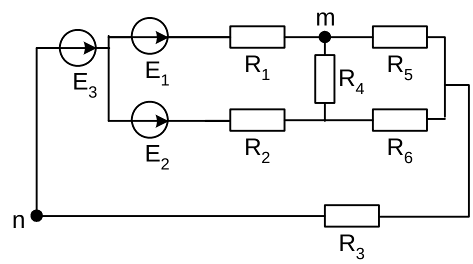


рис.2.28

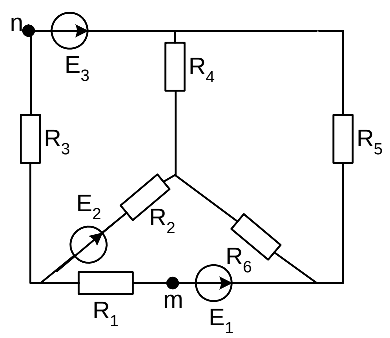


рис.2.29

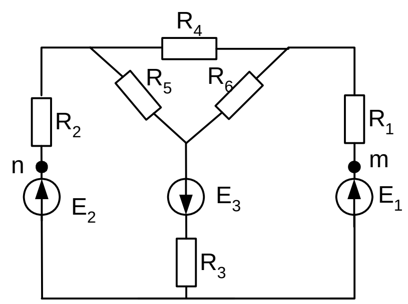


рис.2.30

2.3.ВАРИАНТЫ ДОМАШНЕГО ЗАДАНИЯ

вариант	рис.	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	E_1	E_2	E_3
1	2.1	13	5	2	8	11	15	-	12	16
2	2.2	8	10	6	15	21	28	-	25	14
3	2.3	4	13	9	10	5	6	62	16	-
4	2.4	12	35	22	12	35	22	8	10	-
5	2.5	4	11	5	12	7	8	-	45	25
6	2.6	5	10	12	7	8	15	-	15	13
7	2.7	130	40	60	80	110	45	-	18	12

вариант	рис.	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	E_1	E_2	E_3
8	2.8	55	80	100	40	70	120	-	26	10
9	2.9	7	12	4	9	15	8	-	20	8
10	2.10	110	60	45	150	80	50	-	60	12
11	2.11	20	60	100	35	150	40	-	100	150
12	2.12	15	12	10	9	8	7	-	14	13
13	2.13	4	7	10	12	20	5.5	15	20	10
14	2.14	9	20	16	40	30	22	10	30	40
15	2.15	13	5	9	7	10	4	15	10	21
16	2.16	4	8	6	10	13	10	12	30	9
17	2.17	10	18	5	10	8	6	10	20	30
18	2.18	30	40	22	10	14	50	15	23	9.5
19	2.19	5	7	10	4	15	20	15	20	-
20	2.20	6	5	8	14	7	8	20	-	14
21	2.21	20	20	1	20	50	30	-	20	45
22	2.22	10	5	6	50	20	30	60	-	100
23	2.23	5	10	3	30	20	50	-	315	210
24	2.24	20	2	4	10	30	60	180	170	-
25	2.25	2	10	5	10	30	60	170	80	-
26	2.26.	10	20	16	20	30	50	200	-	330
27	2.27	30	10	27	50	10	40	-	190	115
28	2.28	10	25	31	70	5	95	47	100	25
29	2.29	12	37	15	18	56	75	35	48	15
30	2.30	19	4	21	350	100	210	150	100	75
31	2.1	25	31	47	22	5	36	-	16	12
32	2.2	2	5	4	17	12	9	-	14	25
33	2.3	4	5	14	33	54	44	16	62	-
34	2.4	2	1	6	46	54	21	10	8	-
35	2.5	5	15	4	34	67	30	-	25	45

вариант	рис.	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	E_1	E_2	E_3
36	2.6	4	2	5	12	15	40	-	13	15
37	2.7	21	44	31	10	20	30	-	12	18
38	2.8	13	15	6	12	50	43	-	10	26
39	2.9	3	2	6	10	10	20	-	8	20
40	2.10	15	13	5	40	7	50	-	12	60
41	2.11	10	30	25	100	250	150	-	150	100
42	2.12	7	13	2	15	10	45	-	13	14
43	2.13	2	5	7	31	45	20	18	10	20
44	2.14	34	45	50	100	120	60	30	10	30
45	2.15	31	27	6	5	130	25	51	15	21
46	2.16	2	5	7	14	50	43	30	12	18
47	2.17	10	15	5	110	15	45	30	25	10
48	2.18	16	12	7	30	45	20	9	24	15
49	2.19	5	10	1	14	25	30	20	15	-
50	2.20	4	2	7	30	20	11	14	-	20
51	2.21	5	6	9	21	44	25	-	45	20
52	2.22	23	4	46	100	210	50	100	-	60
53	2.23	30	20	45	100	350	20	-	210	315
54	2.24	20	35	10	350	70	145	170	180	-
55	2.25	25	6	17	35	210	44	80	170	-
56	2.26	40	30	15	170	345	150	330	-	200
57	2.27	35	10	20	155	430	75	-	115	190
58	2.28	54	32	6	105	50	60	45	25	100
59	2.29	5	10	8	100	50	35	48	35	25
60	2.30	30	4	6	35	70	150	100	150	57

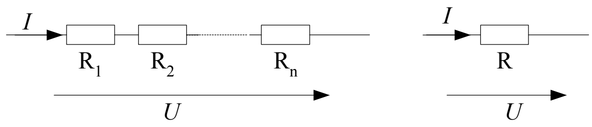
3. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ АНАЛИЗА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ НА ПРИМЕРЕ ЦЕПЕЙ ПОСТОЯННОГО ТОКА

3.1. МЕТОД ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Метод эквивалентных преобразований заключается в том, что участок схемы заменяется другим участком, таким образом, что напряжения и токи в остальной части схемы остаются неизменными. Рассмотрим следующие типы соединений элементов цепи:

Последовательное соединение.

Участок цепи, содержащий несколько сопротивлений, соединенных между собой последовательно, может быть заменен эквивалентным сопротивлением, равным их сумме.



а) б)

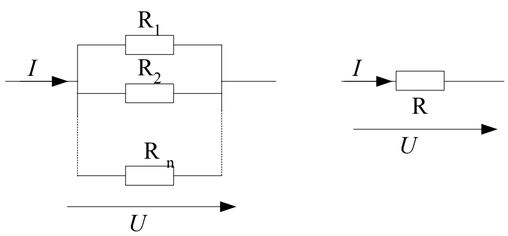
рис.3.1

$$R = R_1 + R_2 + ... + R_n$$

(3.1)

Параллельное соединение.

Эквивалентная проводимость участка цепи, все элементы которого соединены между собой параллельно, равна сумме проводимостей элементов.



а) б)

рис. 3.2

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n}. \tag{3.2}$$

Эквивалентное сопротивление двух параллельно соединенных резисторов:

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}. \tag{3.3}$$

Для трех и более сопротивлений эта формула не справедлива, необходимо пользоваться формулой (3.2).

Соединение звездой и треугольником.

Участок цепи, элементы в котором соединены «звездой» (рис. 3.3 а), может быть заменен эквивалентным ему участком, элементы в котором соединены «треугольником» (рис. 3.3 б). При этом элементы одной из схем связаны с элементами другой при помощи формул преобразования.

Формулы для преобразования из «звезды» в «треугольник»:

$$R_A = \frac{R_a R_b + R_b R_c + R_c R_a}{R_a},$$

$$R_B = \frac{R_a R_b + R_b R_c + R_c R_a}{R_b}, \tag{3.4}$$

$$R_C = \frac{R_a R_b + R_b R_c + R_c R_a}{R_c}.$$

Формулы для преобразования из «треугольника» в «звезду»:

$$R_a = \frac{R_B R_C}{R_A + R_B + R_C},\ R_b = \frac{R_C R_A}{R_A + R_B + R_C},\ R_c = \frac{R_A R_B}{R_A + R_B + R_C}. \tag{3.5}$$

Замечание: данные формулы можно применять только если в схеме между точками A, B и C нет источников.

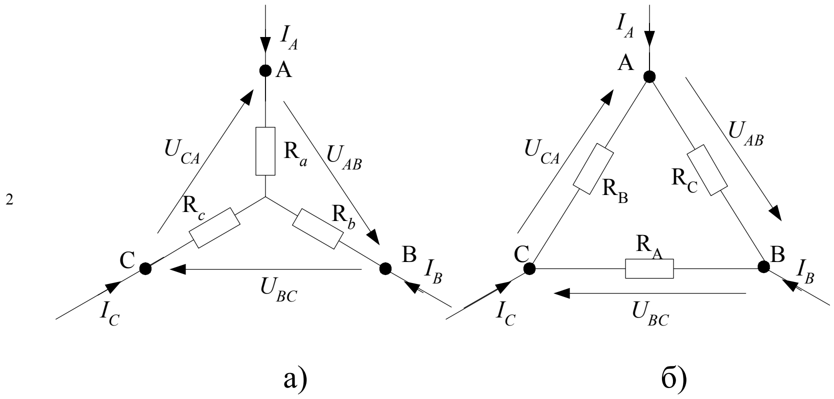


рис. 3.3.

Задача 3.1. Для цепи изображенной на рис. 3.4 вычислить токи во всех ветвях и напряжение между точками *а* и *б*. Параметры элементов схемы: E=5 В, R_1=10 Ом, R_2=200 Ом, R_3=80 Ом, R_4=160 Ом.

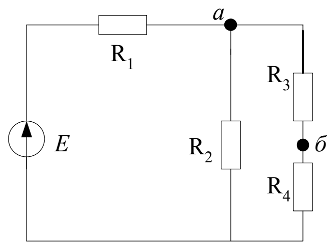


рис. 3.4.

Решение. Рассматриваемая цепь содержит один источник ЭДС и состоит из трех ветвей и двух узлов. Выберем направления токов от «+» к «–» (рис. 3.5).

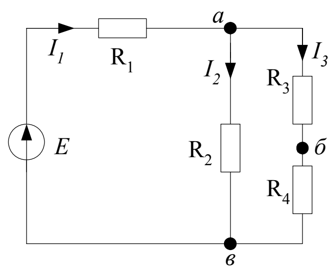
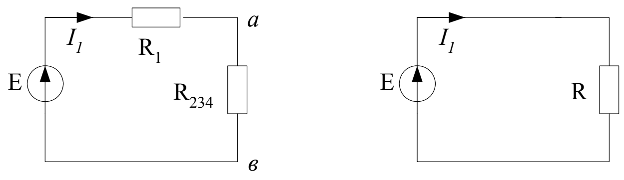


рис. 3.5.

Найдем ток в ветви источника. Для этого заменим соединения резисторов эквивалентным сопротивлением R. Участок, расположенный между точками *а* и *в*, соединен последовательно с сопротивлением R_1. Сопротивление R_2 соединено параллельно с участком цепи, содержащим последовательное соединение R_3 и R_4. Следовательно, получаем:

$$R_{234} = \frac{1}{\dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{(R_3 + R_4)}} = \frac{R_2(R_3 + R_4)}{R_2 + R_3 + R_4} = 109\,\text{Ом};$$

$$R = R_1 + R_{234} = R_1 + \frac{R_2(R_3 + R_4)}{R_2 + R_3 + R_4} = 10 + \frac{200(80 + 160)}{200 + 80 + 160} = 119 \text{ Ом}.$$



а) б)

рис.3.6. Эквивалентные схемы

Найдем ток $I_1 = \dfrac{E}{R} = \dfrac{5}{119} = 0{,}042\,\text{А}$. Затем найдем напряжение между точками *а* и *в* (рис.3.6 б). По закону Ома $U_{ав} = R_{234} \cdot I_1 = 109 \cdot 0{,}042 = 4{,}57$ В. Токи находятся следующим образом: $I_2 = \dfrac{U_{ав}}{R_2} = \dfrac{4{,}57}{200} = 0{,}023$ А, $I_3 = \dfrac{U_{ав}}{R_3 + R_4} = \dfrac{4{,}57}{80 + 160} = 0{,}019\,\text{А}$. Теперь можем найти напряжение между точками *а* и *б*.

$$U_{аб} = I_3 \cdot R_3 = 0{,}019 \cdot 80 = 1{,}52 \text{ В}.$$

Задача 3.2. Для схемы, изображенной на рис. 3.7, определить силу тока в ветви источника. Параметры элементов схемы: E=5 В, R_0=10 Ом, R_1=200 Ом, R_2=80 Ом, R_3=80 Ом, R_4=80 Ом, R_5=160 Ом.

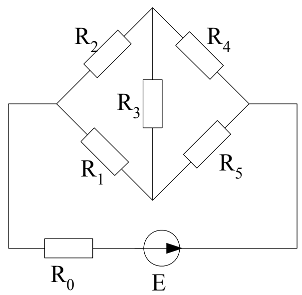
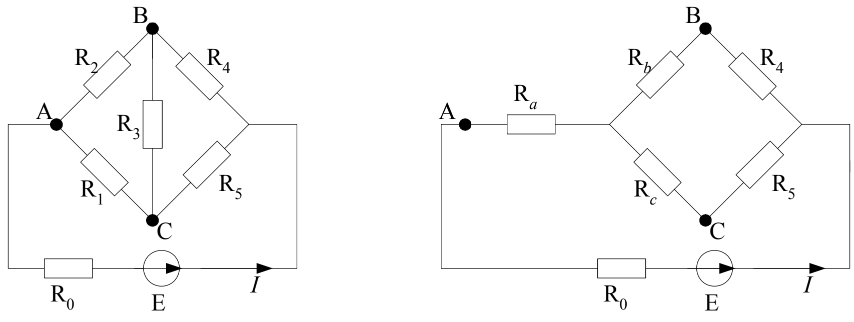


рис. 3.7.

Решение. Соединение такого типа, как показано на рис 3.7, называется мостовым соединением. Оно не может быть рассмотрено, как совокупность последовательных и параллельных соединений. Для сведения его к последовательным и параллельным соединениям необходимо использовать формулы для преобразования «звезда-треугольник» или «треугольник-звезда».



а) б)

рис. 3.8.

Преобразуем треугольник между точками А, В и С (рис. 3.8 а) в звезду (рис 3.8.б). Воспользуемся формулами преобразования (3.5). Подставляем в эти формулы: R_A=R_3, R_B=R_1, R_C=R_2. Получим элементы схемы 3.8 б.

$$R_a = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3} = 44{,}4 \text{ Ом},$$

$$R_b = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = 17{,}8 \text{ Ом},$$

$$R_c = \frac{R_3 R_1}{R_1 + R_2 + R_3} = 44{,}4 \text{ Ом}.$$

Далее, рассматриваем схему 3.8 б. Элементы R_b и R_4, так же как и R_c и R_5 соединены между собой последовательно, в то же время, ветвь, содержащая R_b и R_4, соединена с ветвью, содержащей R_c и R_5 параллельно. Получим для эквивалентного сопротивления формулу, и вычислим его:

$$R = R_0 + R_a + \frac{(R_b + R_4)(R_c + R_5)}{R_b + R_4 + R_c + R_5} = 121 \text{ Ом}.$$

Тогда ток вычисляется по формуле $I = \frac{E}{R}$=0,041 А.

3.2. МЕТОД НЕПОСТРЕДСТВЕННОГО ПРИМЕНЕНИЯ ЗАКОНОВ КИРХГОФА

Для вычисления токов во всех ветвях схемы можно составить систему уравнений, состоящую из выражений для первого и второго законов Кирхгофа. Эти выражения линейны относительно токов, поэтому получается алгебраическая линейная неоднородная система уравнений. Порядок системы должен быть равен числу неизвестных токов, а следовательно, числу ветвей схемы. Пусть мы имеем цепь, содержащую p ветвей и q узлов. Тогда для q-1 узлов мы можем написать q-1 независимых выражений для первого закона Кирхгофа. Остальные уравнения (их $n=p-(q-1)$) мы должны получить из второго закона Кирхгофа, сформулировав его для n независимых контуров. Независимые контуры выбираются произвольно, так, чтобы каждый последующий отличался от сочетаний предыдущих хотя бы одной новой ветвью. Существует другое условие: при выборе данного количества (n) независимых контуров не должно остаться ветвей не входящих ни в один контур.

Задача 3.3. Найти токи во всех ветвях схемы, изображенной на рис 3.9. Параметры схемы: E_1=15 В, E_2=25 В, R_1=340 Ом, R_2=525 Ом, R_3=115 Ом.

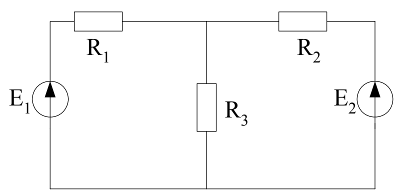


рис.3.9

Решение. Выберем направления токов в ветвях, как показано на рис 3.10. Схема содержит три ветви и два узла. Следовательно, для нее можно сформулировать одно выражение для первого закона Кирхгофа и два выражения для второго закона Кирхгофа. Независимые контуры и направления их обхода выбираем в соответствии с рис. 3.10. Получим систему из трех уравнений для трех неизвестных токов.

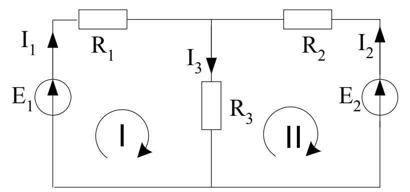


рис. 3.10.

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0;$$

$$I_1 R_1 + I_3 R_3 = E_1; \qquad (3.6)$$

$$-I_2 R_2 - I_3 R_3 = -E_2.$$

Знак «–» в последнем уравнении поставлен потому, что направления токов и ЭДС на совпадают с направлением обхода контура. Решим эту систему методом преобразований. Преобразуя первое из уравнений (3.6) и подставляя выражение для I_3 во второе и третье уравнения, получим

$$I_3 = I_1 + I_2;$$

$I_1(R_1 + R_3) + I_2 R_3 = E_1$, и отсюда $I_1 = \dfrac{E_1 - I_2 R_3}{(R_1 + R_3)}$.

Подставляя полученное выражение для I_1 в третье уравнение, $I_2(R_2 + R_3) + I_1 R_3 = E_2$, получим $I_2(R_2 + R_3) + \dfrac{E_1 - I_2 R_3}{(R_1 + R_3)} R_3 = E_2$, и

следовательно $I_2 = \dfrac{E_2(R_1 + R_3) - E_1 R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}$=0,024 А.

Аналогичным образом, выражая из второго уравнения I_2 и подставляя его в третье уравнение, получаем:

$$I_1 = \frac{E_1(R_2 + R_3) - E_2 R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} = 0{,}035 \text{ А.}$$

Ток I_3, как это следует из первого уравнения, равен сумме токов I_1 и I_2, следовательно:

$$I_3 = \frac{E_1 R_2 + E_2 R_1}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} = 0{,}059 \text{ А..}$$

3.3. МЕТОД КОНТУРНЫХ ТОКОВ

Метод контурных токов заключается в следующем. Для цепи выбирается система независимых контуров. Каждому контуру приписывается контурный ток, циркулирующий в данном контуре. Выбирается направление контурных токов. Если ветвь входит только в один контур, то ток в этой ветви равен контурному току. Если ветвь входит в несколько контуров, то ток этой ветви равен сумме контурных токов, проходящих через данную ветвь с учетом знаков и выбранных направлений. Контурные токи вычисляются из системы уравнений, составленной по определенным правилам. Система для вычисления контурных токов имеет вид:

$$
\begin{aligned}
&R_{11}I_1 + R_{12}I_2 + \ldots + R_{1n}I_n = E_1;\\
&R_{21}I_1 + R_{22}I_2 + \ldots + R_{2n}I_n = E_2;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&R_{n1}I_1 + R_{n2}I_2 + \ldots + R_{nn}I_n = E_n.
\end{aligned}
$$

Здесь R_{11}, R_{22} и т.д. – собственные сопротивления контуров. Они равны сумме сопротивлений входящих в данный контур. R_{12}=R_{21} (например) – взаимные сопротивления первого и второго контуров. Это сопротивления, которые принадлежат как первому, так и второму контуру. Если направления контурных токов через эти сопротивления совпадают, то взаимное сопротивление входит в систему со знаком «+», а если они противоположны то со знаком «–». E_1, E_2 и т.д. равны сумме ЭДС, входящих в соответствующий контур. Если направление источника ЭДС и контурного тока не совпадают, то вклад, соответствующей ЭДС, будет отрицательным.

В случае, когда в схеме есть источники тока, контурный ток будет равен току источника. Нельзя выбирать контуры так, чтобы в одном контуре было несколько источников тока.

Задача 3.4. Методом контурных токов определить токи во всех ветвях цепи, изображенной на рис. 3.11. Параметры элементов схемы: E_1=15 В,

E_2=25 В, E_3=5 В, R_1=40 Ом, R_2=25 Ом, R_3=15 Ом, R_4=30 Ом, R_5=70 Ом, R_6=10 Ом.

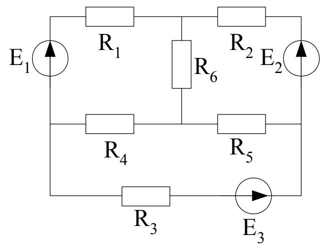


рис.3.11

Решение. Данная цепь содержит шесть ветвей и четыре узла. Следовательно, мы можем выбрать три независимых контура. Обозначим токи в ветвях I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6. Контурные токи обозначим I_I, I_{II}, I_{III}. Выберем их направления, как показано на рис. 3.12.

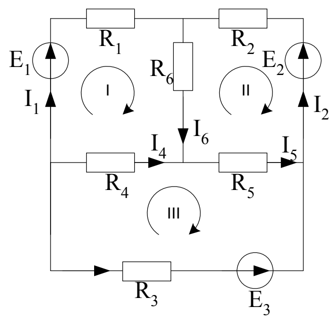


рис. 3.12

Составим систему уравнений для нахождения контурных токов.

$$
\begin{aligned}
&R_{11}I_I + R_{12}I_{II} + R_{13}I_{III} = E_I;\\
&R_{21}I_I + R_{22}I_{II} + R_{13}I_{III} = E_{II};\\
&R_{31}I_I + R_{32}I_{II} + R_{33}I_{III} = E_{III}.
\end{aligned}
$$

Здесь $R_{11}=R_1+R_4+R_6$, $R_{22}=R_2+R_5+R_6$, $R_{33}=R_3+R_4+R_5$, $R_{12}=R_{21}= -R_6$, $R_{23}=R_{32}= -R_5$, $R_{13}=R_{31}= -R_4$, $E_{\mathrm{I}}=E_1$, $E_{\mathrm{II}}= -E_2$, $E_{\mathrm{III}}= -E_3$.

Запишем систему уравнений в матричном виде и решим ее.

$$
\begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_I \\ I_{II} \\ I_{III} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_I \\ E_{II} \\ E_{III} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 80 & -10 & -30 \\ -10 & 105 & -70 \\ -30 & -70 & 115 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_I \\ I_{II} \\ I_{III} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -25 \\ -5 \end{pmatrix};
$$

$$I_I = \frac{\begin{vmatrix} E_I & R_{12} & R_{13} \\ E_{II} & R_{22} & R_{23} \\ E_{III} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix}} = 0{,}017 \text{ А}; \quad I_{II} = \frac{\begin{vmatrix} R_{11} & E_I & R_{13} \\ R_{21} & E_{II} & R_{23} \\ R_{31} & E_{III} & R_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix}} = -0{,}442 \text{ А},$$

$$I_{III} = \frac{\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & E_I \\ R_{21} & R_{22} & E_{II} \\ R_{31} & R_{32} & E_{III} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix}} = -0{,}308 \text{ А}.$$

Теперь, когда найдены контурные токи, найдем токи в ветвях. Первая, вторая и третья ветвь принадлежат только первому, второму и третьему контуру, соответственно. Поэтому токи в них будут равны контурным, с точностью до знака. С учетом выбранных направлений получим $I_1=I_I=0{,}017$, $I_2= -I_{II}=0{,}442$, $I_3= -I_{III}=0{,}308$,. Токи в остальных ветвях являются суперпозицией контурных токов протекающих через ветви. Получим:

$I_4=I_{\mathrm{III}} - I_{\mathrm{I}}= -0{,}308-0{,}017= -0{,}325$,

$I_5=I_{\mathrm{III}} - I_{\mathrm{II}}= -0{,}308+0{,}442=0{,}134$,

$I_6=I_{\mathrm{I}} - I_{\mathrm{II}}=0{,}017+0{,}442=0{,}459$.

3.4. МЕТОД УЗЛОВЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ

При расчете цепей методом узловых потенциалов вычисляются потенциалы всех узловых точек цепи относительно одного, произвольно выбранного (базового), узла. Затем при помощи закона Ома и второго закона Кирхгофа могут быть вычислены токи во всех ветвях. Узловые потенциалы вычисляются из системы уравнений порядка $m=q-1$, где q – количество узлов в цепи. Неизвестными в этой системе являются $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_m$. Потенциал базового узла φ_0 принимается равным нулю. Система уравнений для вычисления узловых потенциалов имеет вид:

$$Y_{11}\varphi_1 + Y_{12}\varphi_2 + ... + Y_{1m}\varphi_m = J_1;$$
$$Y_{21}\varphi_1 + Y_{22}\varphi_2 + ... + Y_{2m}\varphi_m = J_2;$$
....
$$Y_{m1}\varphi_1 + Y_{m2}\varphi_2 + ... + Y_{mm}\varphi_m = J_m.$$

Здесь Y_{11}, Y_{22} и т.д. – собственные проводимости узлов 1, 2 и т.д. соответственно. Они равны сумме проводимостей ветвей соединенных с соответствующими узлами. Взаимные проводимости Y_{12}, Y_{21} узлов 1 и 2 равны сумме проводимостей ветвей непосредственно соединяющих узлы 1 и 2, взятой со знаком «–». То есть, все недиагональные элементы матрицы Y будут отрицательными. Величины J_1, J_2 и т.д. называются узловыми токами. В их формирование вносят вклад ветви, соединенные с узлами 1, 2 и т.д. и содержащие источники ЭДС или источники тока. Вклад ветви, содержащей источник тока, будет равен току этого источника, если источник направлен к узлу и току источника, взятого с обратным знаком, если источник направлен от узла. Вклад ветви, содержащей источник ЭДС, будет равен отношению ЭДС к сопротивлению этой ветви, если ЭДС направлена к узлу, и этой величине с обратным знаком, если ЭДС направлена от узла. Если цепь содержит идеальные источники ЭДС, т.е. ветви которые содержат ЭДС и не содержат сопротивлений, то метод узловых потенциалов не может быть применен.

Задача 3.5. Найти токи во всех ветвях схемы 3.11 методом узловых потенциалов. Параметры элементов схемы те же, что и в задаче 3.4.

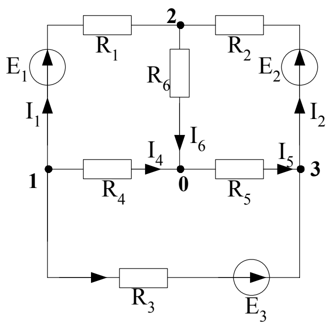


Рис. 3.13

Решение. Пусть $\varphi_0 = 0$. Обозначим $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ потенциалы в узлах 1, 2, 3 относительно нулевого узла (рис.3.13). Составим для их вычисления систему уравнений.

$$Y_{11}\varphi_1 + Y_{12}\varphi_2 + Y_{13}\varphi_3 = J_1;$$
$$Y_{21}\varphi_1 + Y_{22}\varphi_2 + Y_{23}\varphi_3 = J_2;$$
$$Y_{31}\varphi_1 + Y_{32}\varphi_2 + Y_{33}\varphi_3 = J_3.$$

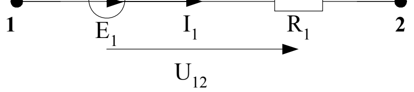
В этой системе $Y_{11} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_3}$, $Y_{22} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_2}$, $Y_{33} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_3}$ – собственные проводимости узлов 1, 2, и 3, соответственно.

Взаимные проводимости – $Y_{12} = Y_{21} = -\frac{1}{R_1}$, $Y_{23} = Y_{32} = -\frac{1}{R_2}$, $Y_{13} = Y_{31} = -\frac{1}{R_3}$. Узловые токи равны: $J_1 = -\frac{E_1}{R_1} - \frac{E_3}{R_3}$, $J_2 = \frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2}$, $J_3 = -\frac{E_2}{R_2} + \frac{E_3}{R_3}$.

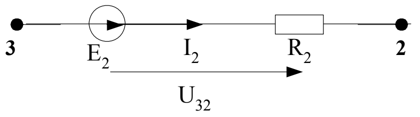
Подставив численные значения, получим систему уравнений, записанную в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 0{,}125 & 0{,}025 & 0{,}066 \\ 0{,}025 & 0{,}165 & 0{,}040 \\ 0{,}066 & 0{,}040 & 0{,}121 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}708 \\ 1{,}375 \\ -0{,}666 \end{pmatrix}$$

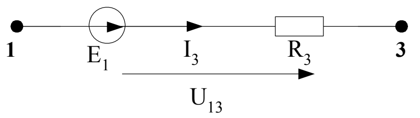
Решив систему, получим значения потенциалов в узлах. Выпишем сразу решение φ_1=–9,745 В, φ_2=4,586 В,φ_3=–9,366 В. Зная значения потенциалов получим значения токов в ветвях, пользуясь законом Ома.



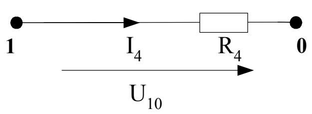
$$I_1 = \frac{U_{12} + E_1}{R_1} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + E_1}{R_1} = 0{,}017 \text{ А};$$



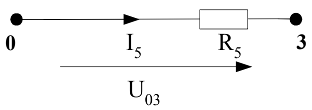
$$I_1 = \frac{U_{32} + E_2}{R_2} = \frac{\varphi_3 - \varphi_2 + E_2}{R_2} = 0{,}442 \text{ А};$$



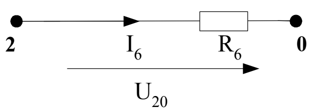
$$I_3 = \frac{U_{13} + E_3}{R_3} = \frac{\varphi_1 - \varphi_3 + E_3}{R_3} = 0{,}308 \text{ А};$$



$$I_4 = \frac{U_{10}}{R_4} = \frac{\varphi_1 - 0}{R_4} = \frac{\varphi_1}{R_4} = -0{,}325 \text{ А};$$



$$I_5 = \frac{U_{03}}{R_5} = \frac{-\varphi_3}{R_5} = 0{,}134 \text{ А};$$



$$I_6 = \frac{U_{20}}{R_6} = \frac{\varphi_2}{R_6} = 0{,}459 \text{ А}.$$

3.5. МЕТОД ЭКВИВАЛЕНТНОГО ГЕНЕРАТОРА

Методом эквивалентного генератора пользуются, когда необходимо вычислить ток в какой-нибудь одной ветви, а остальные ветви нас не интересуют. Тогда схема представляется в виде интересующей нас ветви присоединенной к активному двухполюснику, которым заменяется остальная часть схемы (рис.3.14 а). Параметры активного двухполюсника $R_{экв}$, $E_{экв}$ (рис.3.14 б). вычисляются следующим образом. Мысленно размыкаем ветвь с искомым током и, решая задачу для разомкнутой цепи, находим напряжение холостого хода на разомкнутых зажимах. Напряжение холостого хода будет равно эквивалентной ЭДС. Чтобы найти $R_{экв}$ нужно замкнуть источники ЭДС и разомкнуть источники тока во всей схеме и найти эквивалентное сопротивление относительно разомкнутых зажимов. Схема замещения с такими параметрами эквивалентна исходной. Поэтому можно найти ток в нужной нам ветви, как $I = \dfrac{E_{экв}}{R_{экв}}$.

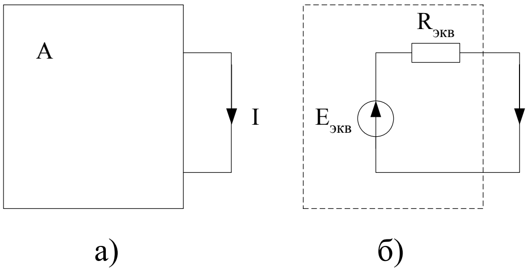


рис. 3.14

Задача 3.6. В схеме, изображенной на рис. 3.9 методом эквивалентного генератора найти ток в третьей ветви I_3. Параметры цепи такие же, как и в задаче 3.3.

Решение. Разомкнем ветвь, в которой протекает ток I_3. Найдем напряжение холостого хода (рис 3.15). Поскольку ветвь разомкнута, тока в ней нет. Следовательно, в схеме через две оставшиеся ветви проходит одинаковый ток $I = \dfrac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2}$. Зная этот ток, из второго закона Кирхгофа для контура, показанного на рис. 3.15 найдем U_{xx}. При этом учитываем, что падение напряжения на резисторе R_3 равно нулю, т.к. ветвь разомкнута и ток в ней равен нулю.

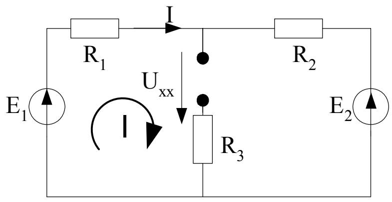
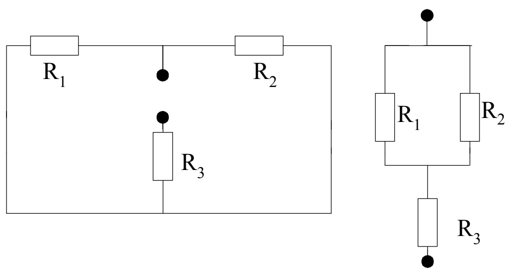


рис.3.15

$$E_1 = I \cdot R_1 + U_{xx} = \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2} R_1 + U_{xx},$$

отсюда $U_{xx} = I \cdot R_1 + U_{xx} = E_1 - \dfrac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2} R_1 = \dfrac{E_1 R_2 + E_2 R_1}{R_1 + R_2}$, и следовательно, $E_{экв} = U_{xx} = \dfrac{E_1 R_2 + E_2 R_1}{R_1 + R_2}$=18.9 В. Найдем теперь эквивалентное сопротивление, пользуясь схемой 3.16.



а) б)

рис. 3.16

Относительно зажимов сопротивление R_3 соединено последовательно с участком, содержащим параллельное соединение сопротивлений R_2 и R_1. Поэтому $R_{экв} = R_3 + \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$=321 Ом. Отсюда найдем ток $I_3 = \dfrac{E_{экв}}{R_{экв}}$=0,059 А.

Задача 3.7. В схеме, изображенной на рис. 3.11 методом эквивалентного генератора найти ток в первой ветви I_1. Параметры цепи такие же, как и в задаче 3.4.

Решение. Разомкнем первую ветвь. Найдем напряжение холостого хода (рис. 3.17). Напряжение холостого хода можно найти, из второго закона Кирхгофа для контура, отмеченного пунктиром на рис. 3.17. Получим

$$U_{xx} = E_1 - I_2 R_6 - I_3 R_4 . \qquad (3.6)$$

Найдем токи I_2 и I_3. В схеме с разомкнутой первой ветвью они будут совпадать с токами I_6 и I_4. Схема с разомкнутой первой ветвью будет иметь два независимых контура, следовательно, система уравнений для нахождения контурных токов будет иметь второй порядок.

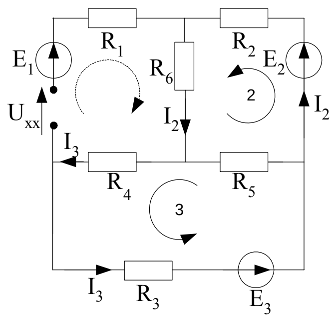


рис.3.17

Получим эту систему:

$$I_2\left(R_6+R_2+R_5\right)-I_3R_5=E_2;$$
$$-I_3R_5+I_3\left(R_4+R_3+R_5\right)=E_3.$$

Подставляя числа, запишем в матричном виде.

$$\begin{pmatrix}105 & -70\\ -70 & 115\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_2\\ I_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}25\\ 5\end{pmatrix}$$

Получим значения токов для разомкнутой схемы I_2=0,449 А и I_3=0,317 А. Затем найдем напряжение холостого хода, подставив эти значения в (3.6).

$U_{xx}=E_1-I_2R_6-I_3R_4$=0,993 В. Вычислим теперь $R_{экв}$ из схемы, показанной на рис. 3.18 а).

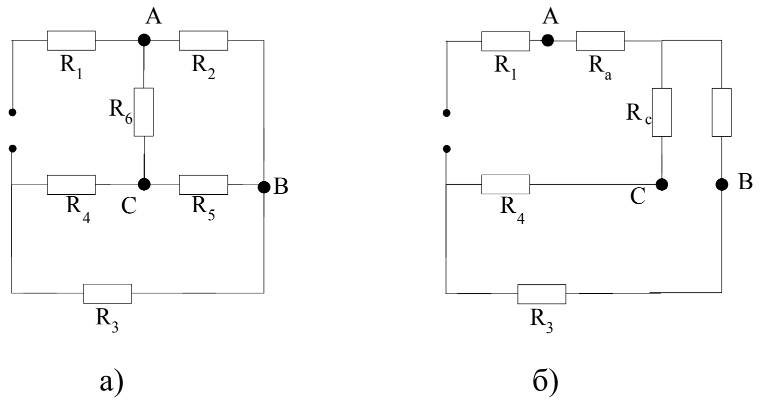


рис.3.18

Схема, показанная на рис 3.18 а) не может быть сведена к комбинации параллельных и последовательных соединений. Поэтому для вычисления эквивалентного сопротивления необходимо преобразовать треугольник, который образуют сопротивления между точками A, B и C в звезду (рис. 3.18

б). Воспользуемся формулами (3.5). При этом учтем, что $R_A = R_5$, $R_B = R_6$, $R_C = R_2$.

$R_a = \dfrac{R_6 R_2}{R_5 + R_6 + R_2}$=2,38 Ом, $R_b = \dfrac{R_2 R_5}{R_5 + R_6 + R_2}$=16,7 Ом, $R_c = \dfrac{R_5 R_6}{R_5 + R_6 + R_2}$=6,67 Ом.

Теперь параметры схемы рис.3.18 б) известны, и можно вычислить $R_{экв} = R_1 + R_a + \dfrac{(R_c + R_4)(R_b + R_3)}{R_c + R_4 + R_b + R_3}$=59,4 Ом. Искомый ток будет равен:

$I_1 = \dfrac{E_{экв}}{R_{экв}}$=0,017 А.

4. БАЛАНС МОЩНОСТЕЙ

Уравнение баланса мощностей является выражением закона сохранения энергии в теории цепей. Условие баланса мощностей заключается в том, что сумма мощностей всех элементов цепи равна нулю. В цепи постоянного тока мощность участка цепи равна произведению силы тока на напряжение на этом участке. Если направление силы тока и напряжения на каком-либо участке не совпадает, перед соответствующим слагаемым ставится знак «–». Поскольку напряжение на источнике ЭДС равно значению ЭДС и противоположно по направлению, мощность источника ЭДС равна:

$$P_{ист} = -EI.$$

Мощность резистивного элемента равна:

$$P_{пр} = UI = \frac{U^2}{R} = I^2 R.$$

Поэтому уравнение баланса мощностей для цепи, не содержащей источников тока:

$$\sum EI = \sum I^2 R.$$

Пример 1. Составим уравнение баланса мощностей для схемы из задачи 3.4.

$$E_1 I_1 + E_2 I_2 + E_3 I_3 = I_1{}^2 R_1 + I_2{}^2 R_2 + I_3{}^2 R_3 + I_4{}^2 R_4 + I_5{}^2 R_5 + I_6{}^2 R_6 \,.$$

Подставим в него численные значения, получим: 12,8 Вт=12,8 Вт.

5. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ДИАГРАММА

Потенциальная диаграмма составляется для участка цепи постоянного тока, например, для контура. При построении потенциальной диаграммы все элементы данного контура обходятся последовательно, при этом вычисляется потенциал каждой точки контура. На графике по вертикальной оси откладывается значение потенциала в каждой точке, а по горизонтальной оси откладывается сумма сопротивлений находящихся на пути обхода контура между началом обхода и текущей точкой.

Пример 2. Построим потенциальную диаграмму для контура, отмеченного жирной линией (рис.5.1) в цепи из задачи 3.4.

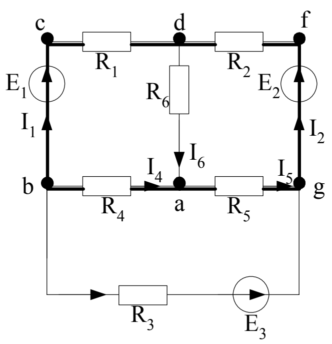


рис. 4.1

Начнем вычисление потенциала с точки *a*. $\varphi_a = 0$. Ток в электрической цепи течет от большего потенциала к меньшему. Поэтому в соответствии с выбранным направлением потенциал в точке *b* должен быть больше, чем в точке *a*, и следовательно $\varphi_b = \varphi_a + I_4 R_4$. Но поскольку величина тока I_4 получилась отрицательная, то значение φ_b= –9,745 В тоже отрицательно. Значение $\varphi_c = \varphi_b + E_1$=5,255 потому что потенциал с той стороны источника ЭДС, куда указывает стрелка, больше, чем с другой стороны на величину ЭДС. Потенциал в точке *d* вычисляется, как $\varphi_d = \varphi_c - I_1 R_1$=4,586 В. Знак минус в этом выражении присутствует, поскольку направление обхода контура совпадает с током, а так как ток течет от большего потенциала к меньшему, то значение φ_d должно быть меньше, чем φ_c. Аналогично рассуждая, получим: $\varphi_f = \varphi_d + I_2R_2$=15,63 В; $\varphi_g = \varphi_f - E_2$=–9,366 В; $\varphi_a = \varphi_g + R_5I_5$=0 В.

Рассмотрим, какие значения будут соответствовать абсциссам точек на потенциальной диаграмме (рис.4.2). Точка a – начало обхода, поэтому $r_a = 0$. Точка b отстоит от точки a на сопротивление R_4, поэтому $r_b = R_4$=30 Ом. Между точкой b и точкой с нет сопротивлений, поэтому $r_c = r_b$=30 Ом. Точка d отстоит от c на сопротивление R_1, поэтому $r_d = r_c + R_1$=70 Ом. По аналогии получим $r_f = r_d + R_2$=95 Ом; $r_g = r_f$ =95 Ом; $r_a = r_f + R_5$=165 В (в данном случае r_a рассматривается, не как начальная точка обхода, а как сопротивление всего контура). Получив все эти значения можно построить потенциальную диаграмму (рис.4.2).

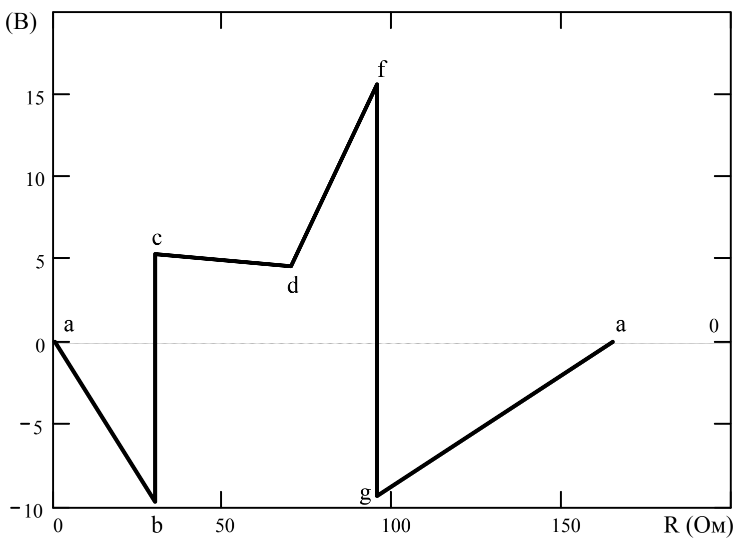


рис. 4.2

6. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нейман Л.Р., Демирчян К.С. Теоретические основы электротехники: в 2-х т. Учебник для вузов. Том 1 . -3-е изд., перераб. и доп. -Л.: Энергоиздат, 1981. -536 с., ил. и -416 с., ил.
2. Бессонов Л.А. Теоретические основы электритехники. Электрические цепи: Учебник. -10-е изд.. –М.: Гардарики, 2000. -638 с.: ил.
3. Цапенко Е.Ф. Теоретические основы электротехники – Учебное пособие.–М.: МГГУ, 1995, 280 с.
4. Сборник задач по теоретическим основам электротехники: Учеб. пособие для энерг. и приборост. Спец. Вузов.– 4-е изд., перераб./Л,А, Бессонов, И,Г, Демидова, М,Е. Заруди и др.; под ред Л.А. Бессонова. – М.: Высш. шк.; 2000. –528 с.: ил.