МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Кафедра №805
«Математическая кибернетика»

Вариант №19

Расчетная работа по дискретной математике

Студент: *Чумин Олег*
Группа: *№18-101*
Преподаватель: *доцент Рыбин Владимир Васильевич.*

- 2000…2001 гг. -

Элементы математической логики и теории булевых функций.

1. Определить для заданной формулы логики высказываний:
   а.) Определить таблицу истинности.
   б.) ДНФ, КНФ, СДНФ, СКНФ методом равносильных преобразований.
   в.) Задать табличным способом соответствующую булеву функцию.
   г.) Найти СДНФ и СКНФ табличным способом (сравнить со СДНФ, СКНФ, полученными в пункте «б»).
   д.) Указать минимальную ДНФ и соответствующую ей переключательную схему.
   е.) Построить многочлен Жегалкина.
   Формула - ⌉(Y&Z) ~ (⌉Z⊃X).[1]

Решение:
а) Определяем таблицу истинности.
Придавая каждой переменной формулы одно из истинностных значений {И, Л}[2] и учитывая, что каждое вхождение знака ⌉ относится к наикратчайшей подформуле, следующей за ним. Список переменных формулы содержит три 3 переменных – <X, Y, Z> → $\exists 2^3 = 8$ – оценок[3] списка переменных.

X, Y, Z, Y&Z, ⌉(Y&Z), ⌉Z, ⌉Z⊃X, ⌉(Y&Z) ~ (⌉Z⊃X)

	X	Y	Z	Y&Z	⌉(Y&Z)	⌉Z	⌉Z⊃X	⌉(Y&Z) ~ (⌉Z⊃X)
1	И	И	И	И	Л	Л	И	Л
2	И	И	Л	Л	И	И	И	И
3	И	Л	И	Л	И	Л	И	И
4	Л	И	И	И	Л	Л	И	Л
5	И	Л	Л	Л	И	И	И	И
6	Л	Л	И	Л	И	Л	И	И
7	Л	И	Л	Л	И	И	Л	Л
8	Л	Л	Л	Л	И	И	Л	Л

б.) Определяем ДНФ[4], КНФ[5], СДНФ[6], СКНФ[7] методом равносильных преобразований.

---

[1] ⌉ символ отрицания «не А»
& символ коньюнкции двух высказываний A&B «А и В», есть высказывание истинное тогда и только тогда, когда истинны оба высказывания А и В;
V символ дизьюнкции двух высказываний AVB «А или В», есть высказывание ложное тогда и только тогда, когда оба высказывания ложны
~ символ эквиваленции двух высказываний A~B «А эквивалентно В», есть высказываение истинное тогда и только тогда, когда истинны А и В;
⊃ символ импликации двух высказываний A ⊃ B «А влечет В», есть высказывание ложное тогда и только тогда, когда А истинно, а В ложно.
[2] И – истина, Л - ложь
[3] сопоставление каждой переменной списка некоторого истинностного значения
[4] Формула находится в дизьюнктивной нормальной форме (ДНФ), если она является дизьюнкцией (быть может одночленной) элементарных коньюнкций
[5] Формула находится в коньюктивной нормальной форме (КНФ), если она является коньюнкцией (возможно одночленной) элементарных дизьюнкций

Находим ДНФ, пользуясь алгоритмом нахождения ДНФ:
1-й этап. Преобразуем исходную формулу в равносильную, в которой отсутствуют операции эквиваленции « $\sim$ » и импликации « $\supset$ ». Для этого заменяем любые подформулы вида $A \supset B$ на $\neg A \vee B$, так как

A	B	$A \supset B$	$\neg A$	$\neg A \vee B$
И	И	И	Л	И
И	Л	Л	Л	Л
Л	И	И	И	И
Л	Л	И	И	И

т.е. $A \supset B \equiv \neg A \vee B$.

$A \sim B \equiv (A \,\&\, B) \vee (\neg A \,\&\, \neg B)$

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \,\&\, B$	$\neg A \,\&\, \neg B$	$(A \,\&\, B) \vee (\neg A \,\&\, \neg B)$	$A \sim B$
И	И	Л	Л	И	Л	И	И
И	Л	Л	И	Л	Л	Л	Л
Л	И	И	Л	Л	Л	Л	Л
Л	Л	И	И	Л	И	И	И

$\neg(Y\&Z) \sim (\neg Z \supset X) \equiv \neg(Y\&Z) \sim (\neg\neg Z \vee X) \equiv (\neg Y \vee \neg Z) \sim (Z \vee X) \equiv$
$\equiv ((\neg Y \vee \neg Z) \,\&\, (Z \vee X)) \vee (\neg(\neg Y \vee \neg Z) \,\&\, \neg(Z \vee X)) \equiv$

2-й этап.
Вносим знак отрицания «$\neg$» под скобки, пользуясь законами де Моргана[8], и сокращаем «$\neg\neg$»по закону снятия двойного отрицания[9].

$\equiv ((\neg Y \vee \neg Z) \,\&\, (Z \vee X)) \vee ((\neg\neg Y \,\&\, \neg\neg Z) \,\&\, (\neg Z \,\&\, \neg X)) \equiv$
$\equiv ((\neg Y \vee \neg Z) \,\&\, (Z \vee X)) \vee ((Y \,\&\, Z) \,\&\, (\neg Z \,\&\, \neg X)) \equiv$

3-й этап.
Так как полученная формула не находится в ДНФ ($\vee$ не элементарных конъюнкций), то применяем законы дистрибутивности & относительно $\vee$[10].

$\equiv [(\neg Y \vee \neg Z) \,\&\, (Z \vee X)] \vee [(Y \,\&\, Z) \,\&\, (\neg Z \,\&\, \neg X)] \equiv$
$\equiv [(\neg Y \vee \neg Z) \,\&\, (Z \vee X)] \vee (Y \,\&\, Z \,\&\, \neg Z \,\&\, \neg X)$[11] $\equiv$
$\equiv [((\neg Y \vee \neg Z) \,\&\, Z) \vee ((\neg Y \vee \neg Z) \,\&\, X)] \vee (Y \,\&\, Z \,\&\, \neg Z \,\&\, \neg X) \equiv$

---

[6] СДНФ – совершенная дизъюнктивная нормальная форма
[7] СКНФ – совершенная коньюктивная нормальная форма
[8] $\neg(A\&B) \equiv \neg A \vee \neg B$ – первый закон де Моргана, $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \,\&\, \neg B$ – второй закон де Моргана
[9] $\neg\neg A \equiv A$ – закон снятия двойного отрицания
[10] $A\&(B \vee C) \equiv (A\&B) \vee (A\&C)$ – закон дистрибутивности & относительно V
[11] скобки можно убрать пользуясь законом коммутативности по &: $A\&B \equiv B\&A$ и по этому же закону меняем местами подформулы

$\equiv [(Z \& (\neg Y \vee \neg Z)) \vee (X \& (\neg Y \vee \neg Z))] \vee (Y \& Z \& \neg Z \& \neg X) \equiv$

$\equiv [((Z \& \neg Y) \vee (Z \& \neg Z)) \vee ((X \& \neg Y) \vee (X \& \neg Z))]$[12] $\vee (Y \& Z \& \neg Z \& \neg X) \equiv$

$\equiv (Z \& \neg Y) \vee (Z \& \neg Z) \vee (X \& \neg Y) \vee (X \& \neg Z) \vee (Y \& Z \& \neg Z \& \neg X) \equiv$

полученная формула находится в ДНФ

Используя закон поглощения[13] сокращаем полученную формулу до вида:

$\equiv (Z \& \neg Y) \vee (X \& \neg Y) \vee (X \& \neg Z) \vee (Z \& \neg Z) \vee ((Z \& \neg Z) \&(Y \& \neg X) \equiv$

$\equiv (Z \& \neg Y) \vee (X \& \neg Y) \vee (X \& \neg Z).$

Находим КНФ $\neg(Y\&Z) \sim (\neg Z \supset X)$ пользуясь алгоритмом.

Для этого воспользуемся формулой с «тесными» отрицаниями, полученной в предыдущем пункту[14] (2-й этап) при нахождении ДНФ:

$\equiv ((\neg Y \vee \neg Z) \& (Z \vee X)) \vee ((Y \& Z) \& (\neg Z \& \neg X)) \equiv$

так как формула не находится в КНФ то применяем закон дистрибутивности V относительно &[15]

$\equiv ((\neg Y \vee \neg Z) \& (Z \vee X)) \vee (Y \& Z \& \neg Z \& \neg X) \equiv$

$\equiv (Y \& Z \& \neg Z \& \neg X) \vee ((\neg Y \vee \neg Z) \& (Z \vee X)) \equiv$

$\equiv [(Y \& Z \& \neg Z \& \neg X) \vee (\neg Y \vee \neg Z)] \& [(Y \& Z \& \neg Z \& \neg X) \vee (Z \vee X)] \equiv$

$\equiv [(\neg Y \vee \neg Z) \vee ((Y \& Z) \& (\neg Z \& \neg X))] \& [(Z \vee X) \vee ((Y \& Z) \& (\neg Z \& \neg X))] \equiv$

$\equiv [((\neg Y \vee \neg Z) \vee (Y \& Z)) \& ((\neg Y \vee \neg Z) \vee (\neg Z \& \neg X))] \& [((Z \vee X) \vee (Y \& Z)) \&$
$\& ((Z \vee X) \vee (\neg Z \& \neg X))] \equiv$

$\equiv [(\neg Y \vee \neg Z) \vee (Y \& Z)] \& [(\neg Y \vee \neg Z) \vee (\neg Z \& \neg X)] \& [(Z \vee X) \vee (Y \& Z)] \&$
$\& [(Z \vee X) \vee (\neg Z \& \neg X)] \equiv$

$\equiv [((\neg Y \vee \neg Z) \vee Y) \& ((\neg Y \vee \neg Z) \vee Z)] \& [((\neg Y \vee \neg Z) \vee \neg Z) \& ((\neg Y \vee \neg Z) \vee \neg X)] \&$
$\& [((Z \vee X) \vee Y) \& ((Z \vee X) \vee Z))] \& [((Z \vee X) \vee \neg Z) \& ((Z \vee X) \vee \neg X)] \equiv$

$\equiv (\neg Y \vee \neg Z \vee Y) \& (\neg Y \vee \neg Z \vee Z) \& (\neg Y \vee \neg Z \vee \neg Z) \& (\neg Y \vee \neg Z \vee \neg X) \&$
$\& (Z \vee X \vee Y) \& (Z \vee X \vee Z) \& (Z \vee X \vee \neg Z) \& (Z \vee X \vee \neg X) \equiv$

$\equiv (\neg Y \vee \neg Z \vee Y) \& (\neg Y \vee \neg Z \vee Z) \& (\neg Y \vee \neg Z \vee \neg Z) \& (\neg Y \vee \neg Z \vee \neg X) \&$
$\& (Z \vee X \vee Y) \& (Z \vee X \vee Z) \& (Z \vee X \vee \neg Z) \& (Z \vee X \vee \neg X) \equiv$

полученная формула находится в КНФ, воспользовавшись законом индемпотентности V[16], получаем следующий сокращенный вид формулы:

$\equiv (\neg Y \vee \neg Z \vee Y) \& (\neg Y \vee \neg Z \vee Z) \& (\neg Y \vee \neg Z) \& (\neg Y \vee \neg Z \vee \neg X) \&$
$\& (Z \vee X \vee Y) \& (Z \vee X) \& (Z \vee X \vee \neg Z) \& (Z \vee X \vee \neg X) \equiv$

теперь применяем 1-й закон поглощения[17]:

$\equiv (\neg Y \vee \neg Z) \& (Z \vee X).$

Находим СДНФ по алгоритму:

1-й этап. Воспользовавшись полученной ДНФ

---

[12] скобки убираем, пользуясь законом коммутативности по V: $A \vee B \equiv B \vee A$

[13] 2-й закон поглощения $A \vee (A\&B) \equiv A$

[14] можно также воспользоваться следующей равносильностью $A \sim B \equiv (\neg A \vee B) \& (A \vee \neg B)$

[15] $A \vee (B \& C) \equiv (A \vee B) \& (A \vee C)$ – закон дистрибутивности V относительно &

[16] $A \vee A \equiv A$ – закон идемпотентности V

[17] $A\&(A \vee B) \equiv A$ – 1-й закон поглощения

$\equiv (Z \& \neg Y) \vee (X \& \neg Y) \vee (X \& \neg Z) \equiv$

2-й этап. Вычеркиваем все элементарные &, в которые входит одновременно переменная и ее отрицание – это тоже уже проделано, так как в полученной формуле, находящейся в ДНФ мы провели сокращение, пользуясь законами поглощения.

3-й этап
Этот этап тоже выполнен, так как в каждой элементарной конъюнкции полученной тождественной формулы любая переменная или ее отрицание встречается только один раз.

4-й этап
относительно всего списка переменных <X, Y, Z> в формуле
$\equiv (Z \& \neg Y) \vee (X \& \neg Y) \vee (X \& \neg Z) \equiv (X \& \neg Y) \vee (\neg Y \& Z) \vee (X \& \neg Z) \equiv$
в каждой из элементарных конъюнкций отсутствует одна из переменных списка. Применяем 2-ю формулу расщепления[18]:
$\equiv (X \& \neg Y) \vee (\neg Y \& Z) \vee (X \& \neg Z) \equiv [((X \& \neg Y) \& Z) \vee ((X \& \neg Y) \& \neg Z)] \vee [((\neg Y \& Z) \& X) \vee ((\neg Y \& Z) \& \neg X)] \vee [((X \& \neg Z) \& Y) \vee ((X \& \neg Z) \& \neg Y)] \equiv$
$\equiv (X \& \neg Y \& Z) \vee (X \& \neg Y \& \neg Z) \vee (\neg Y \& Z \& X) \vee (\neg Y \& Z \& \neg X) \vee (X \& \neg Z \& Y) \vee (X \& \neg Z \& \neg Y) \equiv$
5-й этап. В каждой элементарной конъюнкции полученной формулы переставляем конъюнктивные члены, так, чтобы для каждого $i = (1, 2, 3, \ldots n)$ на i-м месте стоял X_i или $\neg X_i$.
$\equiv (X \& \neg Y \& Z) \vee (X \& \neg Y \& \neg Z) \vee (X \& \neg Y \& Z) \vee (\neg X \& \neg Y \& Z) \vee (X \& Y \& \neg Z) \vee (X \& \neg Y \& \neg Z) \equiv$
6-й этап. Повторяющиеся элементарные конъюнкции по закону идемпотентности сокращаем:
$\equiv \underline{(X \& \neg Y \& Z)} \vee (X \& \neg Y \& \neg Z) \vee \underline{(X \& \neg Y \& Z)} \vee (\neg X \& \neg Y \& Z) \vee (X \& Y \& \neg Z) \vee (X \& \neg Y \& \neg Z) \equiv$
$\equiv (X \& \neg Y \& Z) \vee \underline{(X \& \neg Y \& \neg Z)} \vee (\neg X \& \neg Y \& Z) \vee (X \& Y \& \neg Z) \vee \underline{(X \& \neg Y \& \neg Z)} \equiv$
$\equiv (X \& \neg Y \& Z) \vee (X \& \neg Y \& \neg Z) \vee (\neg X \& \neg Y \& Z) \vee (X \& Y \& \neg Z).$
Получили тождественную формулу, находящуюся в СДНФ.

Определяем СКНФ по такому же алгоритму, что и СДНФ, но с заменой знаков V на & и & на V:

1-й этап.
Используем формулу, полученную при нахождении КНФ.
$\equiv (\neg Y \vee \neg Z) \& (Z \vee X) \equiv$

[18] формулы расщепления: $A \equiv (A \& B) \vee (A \& \neg B)$ - 1-я, $A \equiv (A \vee B) \& (A \vee \neg B)$ – 2-я

2-й этап. Пройден при нахождении КНФ.
3-й этап. Пройден при нахождении КНФ.

4-й этап.
$\equiv (\rceil Y \vee \rceil Z) \,\&\, (Z \vee X) \equiv [((\rceil Y \vee \rceil Z) \vee X) \,\&\, ((\rceil Y \vee \rceil Z) \vee \rceil X)] \,\&\, [((Z \vee X) \vee Y)$
$\&\, ((Z \vee X) \vee \rceil Y)] \equiv$
$\equiv (\rceil Y \vee \rceil Z \vee X) \,\&\, (\rceil Y \vee \rceil Z \vee \rceil X) \,\&\, (Z \vee X \vee Y) \,\&\, (Z \vee X \vee \rceil Y) \equiv$

5-й этап.
$\equiv (X \vee \rceil Y \vee \rceil Z) \,\&\, (\rceil X \vee \rceil Y \vee \rceil Z) \,\&\, (X \vee Y \vee Z) \,\&\, (X \vee \rceil Y \vee Z) \equiv$

6-й этап.
$\equiv (X \vee \rceil Y \vee \rceil Z) \,\&\, (\rceil X \vee \rceil Y \vee \rceil Z) \,\&\, (X \vee Y \vee Z) \,\&\, (X \vee \rceil Y \vee Z)$.
Сокращать нечего, все элементарные дизъюнкции попарно различны, полученная тождественная формула находится в СКНФ.

в.) Задаем табличным способом соответствующую булеву[19] функцию {И = 1, Л = 0}.

	X	Y	Z	Y&Z	$\rceil$(Y&Z)	$\rceil$Z	$\rceil Z \supset X$	$\rceil(Y\&Z) \sim (\rceil Z \supset X)$
1	1	1	1	1	0	0	1	0
2	1	1	0	0	1	1	1	1
3	1	0	1	0	1	0	1	1
4	0	1	1	1	0	0	1	0
5	1	0	0	0	1	1	1	1
6	0	0	1	0	1	0	1	1
7	0	1	0	0	1	1	0	0
8	0	0	0	0	1	1	0	0

г.) Определяем СДНФ и СКНФ табличным способом:
СДНФ
Выберем в таблице соответствующей булевой функции все те строки, в которых $f_A = \rceil(Y\&Z) \sim (\rceil Z \supset X) = 1$:

	X	Y	Z	Y&Z	$\rceil$(Y&Z)	$\rceil$Z	$\rceil Z \supset X$	$\rceil(Y\&Z) \sim (\rceil Z \supset X)$
2	1	1	0	0	1	1	1	1
3	1	0	1	0	1	0	1	1
5	1	0	0	0	1	1	1	1
6	0	0	1	0	1	0	1	1

[19] произвольная n-местная функция измножества {0, 1}

Для каждой из этих строк строим ассоциированные с ними элементарные конъюнкции:
<X, Y, Z>
<1, 1, 0> →(X & Y & ⌉Z)
<1, 0, 1> →(X & ⌉Y & Z)
<1, 0, 0> →(X & ⌉Y & ⌉Z)
<0, 0, 1> →(⌉X & ⌉Y & Z)

Составляем дизъюнкцию, полученных элементарных конъюнкций:
(X & Y & ⌉Z) V (X & ⌉Y & Z) V (X & ⌉Y & ⌉Z) V (⌉X & ⌉Y & Z),
полученная тождественная формула находится в СДНФ для исходной.

СКНФ
Выберем в таблице соответствующей булевой функции все те строки, в которых f_A = ⌉(Y&Z) ~ (⌉Z⊃X) ≠ 1:

	X	Y	Z	Y&Z	⌉(Y&Z)	⌉Z	⌉Z⊃X	⌉(Y&Z) ~ (⌉Z⊃X)
1	1	1	1	1	0	0	1	0
4	0	1	1	1	0	0	1	0
7	0	1	0	0	1	1	0	0
8	0	0	0	0	1	1	0	0

Для каждой из этих строк строим ассоциированные с ними элементарные дизъюнкции:
<X, Y, Z>
<1, 1, 1> →(⌉X V ⌉Y V ⌉Z)
<0, 1, 1> →(X V ⌉Y V ⌉Z)
<0, 1, 0> →(X V ⌉Y V Z)
<0, 0, 0> →(X V Y V Z)

Составляем конъюнкцию, полученных элементарных дизъюнкций:
(⌉X V ⌉Y V ⌉Z) & (X V ⌉Y V ⌉Z) & (X V ⌉Y V Z) & (X V Y V Z)
полученная тождественная формула находится в СКНФ для исходной.

Сравниваем со СДНФ и СКНФ, полученными в пункте «б».
СДНФ
(X & ⌉Y & Z) V (X & ⌉Y& ⌉Z) V (⌉X & ⌉Y & Z) V (X & Y & ⌉Z) тождественными преобразованиями,
(X & Y & ⌉Z) V (X & ⌉Y & Z) V (X & ⌉Y & ⌉Z) V (⌉X & ⌉Y & Z) ← по таблице, видно, что полученные СКНФ различны только расположением элементарных дизъюнкций.

СКНФ

$(X \vee \neg Y \vee \neg Z) \,\&\, (\neg X \vee \neg Y \vee \neg Z) \,\&\, (X \vee Y \vee Z) \,\&\, (X \vee \neg Y \vee Z)$ тождественными преобразованиями,
$(\neg X \vee \neg Y \vee \neg Z) \,\&\, (X \vee \neg Y \vee \neg Z) \,\&\, (X \vee \neg Y \vee Z) \,\&\, (X \vee Y \vee Z) \leftarrow$ по таблице, различны только расположением элементарных конъюнкций.

д.) Определение минимальной ДНФ.
Пользуемся методом Блейка определяем сокращенную ДНФ.
1-й этап.
Воспользуемся полученной формулой, находящейся в СДНФ относительно списка переменных $\langle X, Y, Z \rangle$:
$(X \,\&\, \neg Y \,\&\, Z) \vee (X \,\&\, \neg Y \,\&\, \neg Z) \vee (\neg X \,\&\, \neg Y \,\&\, Z) \vee (X \,\&\, Y \,\&\, \neg Z)$.

2-й этап.
Применяем правило обобщенного склеивания[20]:
Записываем все возможные склеивания элементарных конъюнкций.
$(X \,\&\, (\neg Y \,\&\, Z)) \vee (\neg X \,\&\, (\neg Y \,\&\, Z)) \equiv (X \,\&\, \neg Y \,\&\, Z) \vee (\neg X \,\&\, \neg Y \,\&\, Z) \vee (\neg Y \,\&\, Z)$,
$((X \,\&\, \neg Y) \,\&\, Z) \vee ((X \,\&\, \neg Y) \,\&\, \neg Z) \equiv (X \,\&\, \neg Y \,\&\, Z) \vee (X \,\&\, \neg Y \,\&\, \neg Z) \vee (X \,\&\, \neg Y)$,
$(X \,\&\, \neg Y \,\&\, Z) \vee (X \,\&\, Y \,\&\, \neg Z)$ no,
$(X \,\&\, \neg Y \,\&\, \neg Z) \vee (X \,\&\, Y \,\&\, \neg Z) \equiv (X \,\&\, \neg Y \,\&\, \neg Z) \vee (X \,\&\, Y \,\&\, \neg Z) \vee (X \,\&\, \neg Z)$,
$(X \,\&\, \neg Y \,\&\, \neg Z) \vee (\neg X \,\&\, \neg Y \,\&\, Z)$ no,
$(\neg X \,\&\, \neg Y \,\&\, Z) \vee (X \,\&\, Y \,\&\, \neg Z)$ no.

В результате получаем формулу, находящуюся в ДНФ и выражающую функцию f_A:
$(X \,\&\, \neg Y \,\&\, Z) \vee (\neg X \,\&\, \neg Y \,\&\, Z) \vee (\neg Y \,\&\, Z) \vee (X \,\&\, \neg Y \,\&\, Z) \vee (X \,\&\, \neg Y \,\&\, \neg Z) \vee (X \,\&\, \neg Y) \vee (X \,\&\, \neg Y \,\&\, \neg Z) \vee (X \,\&\, Y \,\&\, \neg Z) \vee (X \,\&\, \neg Z) \equiv$

3-й этап. Применяем законы идемпотентности и поглощения:
$\equiv (\neg Y \,\&\, Z) \vee (X \,\&\, \neg Y) \vee (X \,\&\, \neg Z)$, которая отличается только расположением конъюнктивных членов от полученной формулы в ДНФ $\equiv (Z \,\&\, \neg Y) \vee (X \,\&\, \neg Y) \vee (X \,\&\, \neg Z)$.

Получили сокращенную формулу, находящуюся в ДНФ:
$(\neg Y \,\&\, Z) \vee (X \,\&\, \neg Y) \vee (X \,\&\, \neg Z)$
Дальнейшие склеивания невозможны, так как в элементарных конъюнкциях переменные разноименные.

Определяем минимальную ДНФ с использование ядровых импликантов.
$(\neg Y \,\&\, Z) \vee (X \,\&\, \neg Y) \vee (X \,\&\, \neg Z)$

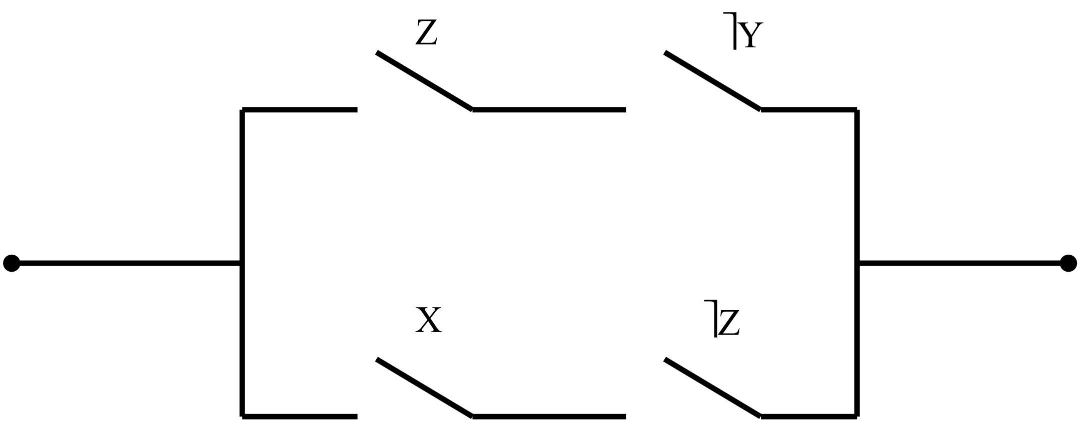
[20] $(A \,\&\, B) \vee (\neg A \,\&\, B) \equiv (A \,\&\, B) \vee (\neg A \,\&\, B) \vee B$ – правило обобщенного склеивания.

Выделим ядровые импликанты,[21] для этого составим таблицу значений для простых импликантов булевой функции $f_A(X, Y, Z)$

	X	Y	Z	⌉Y	⌉Z	$f_A(X, Y, Z)$	⌉Y & Z	X & ⌉Y	X & ⌉Z
1	0	0	0	1	1	0	0	0	0
2	0	0	1	1	0	1	1	0	0
3	0	1	0	0	1	0	0	0	0
4	1	0	0	1	1	1	0	1	1
5	1	0	1	1	0	1	1	1	0
6	1	1	0	0	1	1	0	0	1
7	1	1	1	0	0	0	0	0	0
8	0	1	1	0	0	0	0	0	0

Из таблицы видно, что оценка <1, 0, 0> является собственной[22] оценкой для ⌉Y & Z, а оценка <0, 0, 1> - для X & ⌉Z, т.е. эти импликанты являются ядровыми и войдут в минимальную ДНФ. Рассмотрим V найденных ядровых импликантов: (⌉Y & Z) V (X & ⌉Z). В каждой из строк с номерами 2, 4,5,6 в которых f_A принимает значение 1, содержится, по крайней мере, одна единица в столбцах соответствующих X & ⌉Z и ⌉Y & Z, т.е. указанные импликанты «покрывают» булеву функцию f_A.
Определили минимальную ДНФ: (⌉Y & Z) V (X & ⌉Z).

Строим переключательную схему, соответствующую найденной минимальной ДНФ (⌉Y & Z) V (X & ⌉Z):
(⌉Y & Z) V (X & ⌉Z)



[21] Допустимой коньюнкцией или имликантом булевой функции f_A $(X_1, X_2, \ldots X_n)$ называется элементарная коньюнкция $C \neq 0$ со списком переменных $< X_1, X_2, \ldots X_n >$ такая, что $C \vee f_A \equiv f_A$. Импликант называется простым, если после отбрасывания любой переменной из C получается элементарная коньюнкция, не являющаяся импликантом.
Простой импликант булевой функции f_A называется ядровым, если удаление его из сокращенной ДНФ функции f_A приводит к ДНФ, которая не равносильна исходной ДНФ.
[22] Простой импликант является ядровым тогда и только тогда, когдасуществует оценка списка переменных, на которой он имеет значение 1 а остальные простые импликанты принимают значение 0.

е.) Строим многочлен Жегалкина[23].
1-й этап. : $\rceil(Y\&Z) \sim (\rceil Z \supset X)$, избавляемся от знаков ~, ⊃V используя равносильности $A \supset B \equiv \rceil(A \;\&\; \rceil B)$, $A{\sim}B \equiv A+B+1$[24], $AVB \equiv \rceil(\rceil A \;\&\rceil B)$ –

$\rceil(Y\&Z) \sim (\rceil Z \supset X) \equiv \rceil(Y\&Z) + (\rceil Z \supset X) + 1 \equiv \rceil(Y\&Z) + \rceil(\rceil Z \;\&\; \rceil X) + 1 \equiv$
2-й этап. & Заменяем на « ∘ », $\rceil A$ на A+1.
3-й этап. Раскрываем скобки.
$\equiv \rceil(YZ) + \rceil((Z + 1)(X + 1)) + 1 \equiv YZ + 1 + \rceil(ZX + X + Z + 1) + 1 \equiv$
$\equiv YZ + 1 + ZX + X + Z + 1 + 1 + 1 \equiv$
4-й этап. Полученный многочлен упрощаем.
$\equiv YZ + ZX+ X + Z.$
Многочлен Жегалкина для заданной формулы имеет следующий вид:
$YZ + ZX+ X + Z.$

2. Проверить правильность рассуждений.
Если я встречу своего приятеля, то мы с ним пропустим первое занятие. Либо я рано утром поеду в институт, либо я пропущу первое занятие. Если я поеду рано утром в институт, то встречу своего приятеля. Следовательно, я пропущу первое занятие только тогда, когда встречусь со своим приятелем.

Решение: встречу своего приятеля – X_1; пропустим первое занятие – X_2; я рано утром поеду в институт – X_3;

$$\frac{X_1 \supset X_2,\ X_3 \sim X_2,\ X_3 \supset X_1}{X_1 \supset X_2}$$

$F = [(X_1 \supset X_2)\&(X_3 \sim X_2)\&(X_3 \supset X_1)] \supset (X_1 \supset X_2);$

$G = (X_1 \supset X_2)\&(X_3 \sim X_2)$

$H = (X_1 \supset X_2)\&(X_3 \sim X_2)\&(X_3 \supset X_1);$

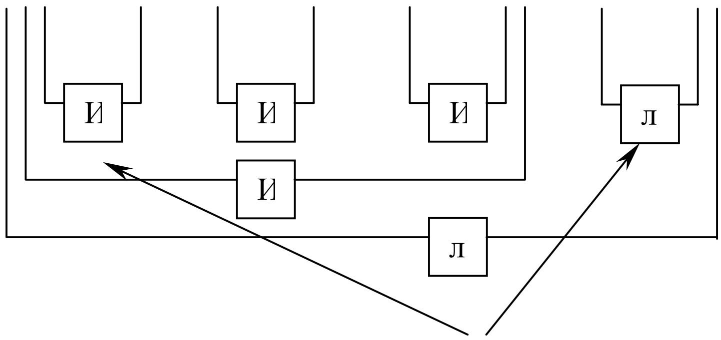
[23] Многочлен Жегалкина - Многочлен Жегалкина представляет собой сумму попарно различных членов вида $X_{i1}\ X_{i2} \ldots X_{ik}$ $(0 < i_1 < i_2 < \ldots < i_k < n+1)$, а также свободного члена d, где $d \in \{0, 1\}$.
[24]Логическое сложение – X+Y и X&Y.

Составляем таблицу истинности ($2^3 = 8$ строк):

X_1	X_2	X_3	$X_1 \supset X_2$	$X_3 \sim X_2$	$X_3 \supset X_1$	G	H	F
И	И	И	И	И	И	И	И	И
И	И	Л	И	Л	И	Л	Л	И
И	Л	И	Л	Л	И	Л	Л	И
И	Л	Л	Л	И	И	Л	Л	И
Л	И	И	И	И	Л	И	Л	И
Л	И	Л	И	Л	И	Л	Л	И
Л	Л	И	И	Л	Л	Л	Л	И
Л	Л	Л	И	И	И	И	И	И

Рассуждение правильно, так как формула тождественно истинная (см. построенную выше таблицу).
В случае большего числа высказывательных переменным (>3) можно проверить следующим образом (доказательство от противного): Пусть F не тождественно истинная формула, тогда в силу свойств коньюнкции получаем, что:

$$[(X_1 \supset X_2)\ \&\ (X_3 \sim X_2)\ \&\ (X_3 \supset X_1)] \supset [X_1 \supset X_2]$$



Но так как $X_1 \supset X_2$ = И, то приходим к противоречию, что и доказывает правильность рассуждений и истинность формулы.

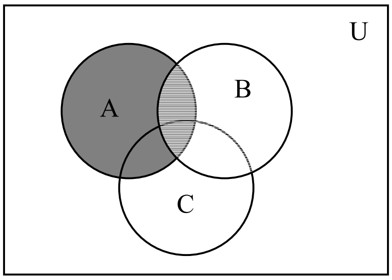
Начальные понятия теории множеств.

3. Доказать тождество.
   $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$. [25]

[25] A\B – Относительное дополнение множества B до множества A

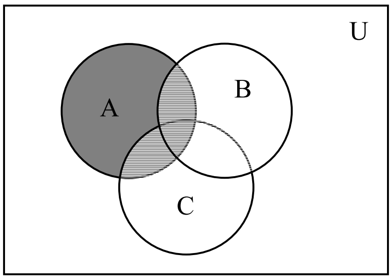
Множества, стоящие в левой и правой частях равенства изображаем с помощью диаграмм Эйлера – Венна:

Рис. 1



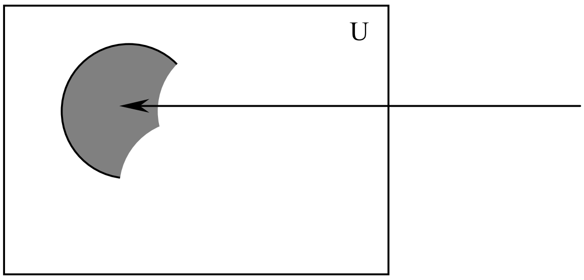
A\B – все элементы A, которые не принадлежат B.

Рис. 2



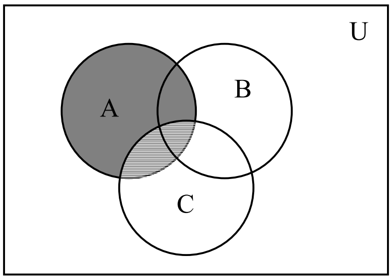
(A \ B) \ C - все элементы A \ B, которые не принадлежат C

Рис. 3



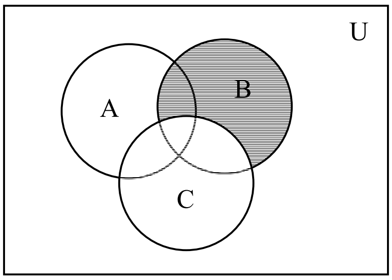
(A \ B) \ C

Рис. 4



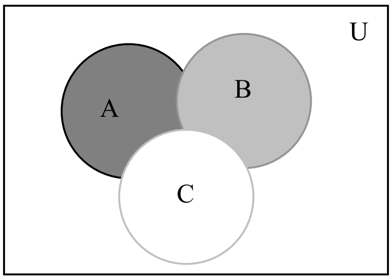
A \ C - все элементы A, которые не принадлежат C.

Рис. 5



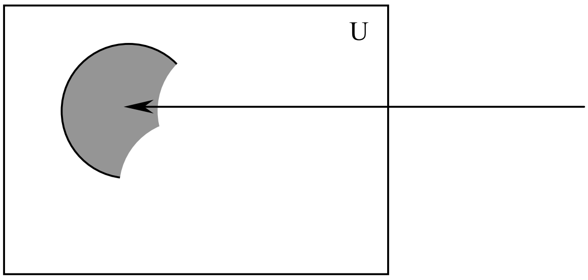
B \ C – все элементы B, которые не принадлежат C.

Рис. 6



(A \ C) \ (B \ C) – все элементы A \ C, которые не принадлежат B \ C.

Рис. 7



(A \ C) \ (B \ C)

Рис. 3 и 7 иллюстрируют равенство множеств (A \ B) \ C и (A \ C) \ (B \ C).

Решение-2 (по принадлежности элемента): Пусть x∈ (A\B)\C ⇒ x∈ A\B x∉ C ⇒ x∉ C и (x∈ A и x∉ B)
x∈ A, x∉ B, x∉ C ⇒ x∈ A\C и x∉ B\C ⇒x∈ (A\C)\(B\C)
x∈ (A\C)\(B\C) ⇒ x∈ A\C и x∉ B\C ⇒ x∈ A, x∉ C и x∉ B\C
x∈ A, x∉ B, x ∉ C ⇒ x∈ (A\B)\C.

Решение-3 (метод тождественных преобразований)

$$(A\setminus C)\setminus(B\setminus C)=(A\cap\overline{C})\cap(\overline{B\cap\overline{C}})=A\cap\overline{C}\cap(\overline{B}\cup C)=(A\cap\overline{C}\cap\overline{B})\cup(A\cap\overline{C}\cap C)=A\cap\overline{C}\cap\overline{B}=$$
$$=(A\setminus B)\setminus C.$$

Решение-4 (метод характеристической функции)

$$\alpha_A=\begin{cases}1, x\in A\\ 0, x\notin A\end{cases}\quad \alpha_{A\cup B}=\alpha_A+\alpha_B-\alpha_{A\cap B};\ \ \alpha_{A\cap B}=\alpha_A\cdot\alpha_B;\ \ \alpha_{\overline{A}}=1-\alpha_A.$$

$$\alpha_{(A\setminus B)\setminus C}=\alpha_{A\cap\overline{B}\cap\overline{C}}=\alpha_A\cdot\alpha_{\overline{B}}\cdot\alpha_{\overline{C}}=\alpha_A\cdot(1-\alpha_B)\cdot(1-\alpha_C)=(\alpha_A-\alpha_A\cdot\alpha_B)\cdot(1-\alpha_C)=$$
$$=(\alpha_A-\alpha_A\cdot\alpha_C-\alpha_A\cdot\alpha_B+\alpha_A\cdot\alpha_B\cdot\alpha_C);$$

$$\alpha_{(A\setminus C)\setminus(B\setminus C)}=\alpha_{A\cap\overline{C}\cap(\overline{B\cap\overline{C}})}=\alpha_A\cdot(1-\alpha_C)\cdot\alpha_{\overline{B}\cup C}=\alpha_A\cdot(1-\alpha_C)\cdot(\alpha_{\overline{B}}+\alpha_C-\alpha_{\overline{B}\cap C})=$$
$$=\alpha_A\cdot(1-\alpha_C)\cdot(\alpha_{\overline{B}}+\alpha_C-\alpha_{\overline{B}}\cdot\alpha_C)=\alpha_A\cdot(1-\alpha_C)\cdot(1-\alpha_B+\alpha_C-(1-\alpha_B)\cdot\alpha_C)=$$
$$=(\alpha_A-\alpha_A\cdot\alpha_C)\cdot(1-\alpha_B+\alpha_C-(\alpha_C-\alpha_C\alpha_B))=(\alpha_A-\alpha_A\cdot\alpha_C)\cdot(1-\alpha_B+\alpha_C-\alpha_C+\alpha_C\alpha_B)=$$
$$=(\alpha_A-\alpha_A\cdot\alpha_C)\cdot(1-\alpha_B+\alpha_C\alpha_B)=\alpha_A-\alpha_A\alpha_B+\alpha_A\cdot\alpha_B\cdot\alpha_C-\alpha_A\cdot\alpha_C+\alpha_A\cdot\alpha_B\cdot\alpha_C-\alpha_A\cdot\alpha_B\cdot\alpha_C\cdot\alpha_C=$$
$$=\alpha_A-\alpha_A\alpha_B+\alpha_A\cdot\alpha_B\cdot\alpha_C-\alpha_A\cdot\alpha_C$$

Решение-5 (логический метод)

$A \cup B \to XVY$; $A \cap B \to X \,\&\, Y$; $\overline{A} \to \rceil X$

$(A \setminus C) \setminus (B \setminus C) = (A \cap \overline{C}) \cap \overline{(B \cap \overline{C})} = (X \& \rceil Z) \& \rceil(Y \& \rceil Z) = X \& \rceil Z \& (\rceil YVZ) = G$;

$(A \setminus B) \setminus C = A \cap \overline{C} \cap \overline{B} = X \& \rceil Z \& \rceil Y = I$;

Составляем таблицу истинности (2^3=8 строк):

X	Y	Z	⌉Y	⌉Z	⌉YVZ	X&⌉Z	G	I
И	И	И	Л	Л	И	Л	Л	Л
И	И	Л	Л	И	Л	И	Л	Л
И	Л	И	И	Л	И	Л	Л	Л
Л	И	И	Л	Л	И	Л	Л	Л
Л	Л	И	И	Л	И	Л	Л	Л
Л	И	Л	Л	И	Л	Л	Л	Л
И	Л	Л	И	И	И	И	И	И
Л	Л	Л	И	И	И	Л	Л	Л

У правой и левой частей доказываемого тождества формулы логики высказываний, соответствующие этим частям равносильны.

Отношения и функции.

4. Задано бинарное отношение ρ = {<1, 1>, <1, 4>, <2, 2>, <2, 3>, <2, 4>, <3, 3>, <3, 4>, <4, 4>}

   на множестве X = {1, 2, 3, 4}. Является ли оно рефлексивным, симметричным, антисимметричным, транзитивным?

   Найти D(ρ), R(ρ), ρ^{-1}, ρ^2 или (ρ o ρ).

   Изобразите указанное бинарное отношение на координатной плоскости.

Решение:

Пользуясь определением и рассматривая первые и вторые компоненты упорядоченных пар, находим соответственно:

- область определения заданного отношения ρ
  D(ρ) = {x ∈ X | ∃y ∈ X, → <x, y> ∈ ρ} = {1, 2, 3, 4};[26]

- область значений заданного отношения ρ
  R(ρ) = {y ∈ X | ∃x ∈ X, → <x, y> ∈ ρ} = {1, 2, 3, 4}.

Находим обратное отношение ρ^{-1} к заданному ρ:

- ρ^{-1} = {<y, x> | <x, y> ∈ ρ} =
  = {<1, 1>, <4, 1>, <2, 2>, <3, 2>, <4, 2>, <3, 3>, <4, 3>, <4, 4>}.

Для нахождения композиции ρoρ составляем таблицу:

ρ^2 = ρoρ = {<x, z> | y ∈ X, → <x, y> ∈ ρ и <y, z> ∈ ρ}

[26] "→" - следует

<x, y> ∈ ρ	<y, z> ∈ ρ	<x, z> ∈ ρoρ
<1, 1>	<1, 1> <1, 4>	<1, 1> <1, 4>
<1, 4>	<4, 4>	<1, 4>
<2, 2>	<2, 2> <2, 3> <2, 4>	<2, 2> <2, 3> <2, 4>
<2, 3>	<3, 3> <3, 4>	<2, 3> <2, 4>
<2, 4>	<4, 4>	<2, 4>
<3, 3>	<3, 3> <3, 4>	<3, 3> <3, 4>
<3, 4>	<4, 4>	<3, 4>
<4, 4>	<4, 4>	<4, 4>

ρoρ = {<1, 1>, <1, 4>, <2, 2>, <2, 3>, <2, 4>, <3, 3>, <3, 4>, <4, 4>}.

Отношение ρ <u>рефлексивно</u>, так как x ρ x для ∀x ∈ X:
<1, 1>, <2, 2>, <3, 3>, <4, 4>, кроме этого отношение равенства I_X на множестве X таково, что I_X = {<x, x> | x∈ X } =
= {<1, 1>, <2, 2>, <3, 3>, <4, 4>} ⊆ ρ. [27]

Условие $I_X \subseteq \rho$ является необходимым и достаточным для того, чтобы ρ было рефлексивно.

Отношение ρ <u>несимметрично</u>, так как x ρ y не → y ρ x для ∀x, y∈ X: например <1, 4> ∈ ρ, но <4, 1> ∉ ρ. Кроме этого, $\rho^{-1} \not\subset \rho$, так как ρ^{-1} = {<1, 1>, <4, 1>, <2, 2>, <3, 2>, <4, 2>, <3, 3>, <4, 3>, <4, 4>} ⊄ρ = {<1, 1>, <1, 4>, <2, 2>, <2, 3>, <2, 4>, <3, 3>, <3, 4>, <4, 4>} → например уже <4, 1>∈ ρ^{-1}, но <4, 1>∉ ρ.
Условие $\rho^{-1} \subseteq \rho$ является необходимым и достаточным для симметричности отношения ρ, но оно не выполняется, также как не выполняются условия $\rho \subseteq \rho^{-1}$ → $\rho^{-1}=\rho$.

Отношение ρ <u>транзитивно</u>, так как x ρ y и y ρ z → x ρ z для ∀x, y, z ∈ X:

<x, y> ∈ ρ	и	<y, z> ∈ ρ	→	<x, z> ∈ ρ
<1, 1>		<1, 1> <1, 4>		<1, 1> <1, 4>
<1, 4>		<4, 4>		<1, 4>
<2, 2>		<2, 2> <2, 3> <2, 4>		<2, 2> <2, 3> <2, 4>
<2, 3>		<3, 3> <3, 4>		<2, 3> <2, 4>
<2, 4>		<4, 4>		<2, 4>
<3, 3>		<3, 3> <3, 4>		<3, 3> <3, 4>
<3, 4>		<4, 4>		<3, 4>
<4, 4>		<4, 4>		<4, 4>

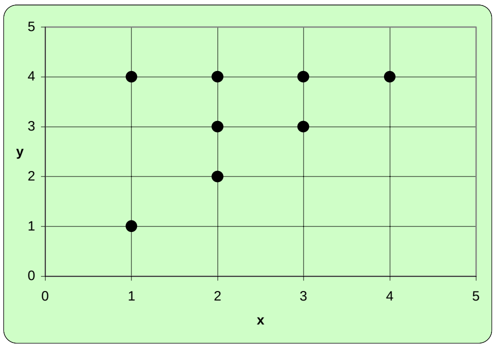
[27] ⊆ - символ отношения включения одного множества в другое

Действительно, $\rho\circ\rho \subseteq \rho$, более того $\rho\circ\rho = \rho$:

$\rho\circ\rho = \{<1, 1>, <1, 4>, <2, 2>, <2, 3>, <2, 4>, <3, 3>, <3, 4>, <4, 4>\}=$
$= \rho = \{<1, 1>, <1, 4>, <2, 2>, <2, 3>, <2, 4>, <3, 3>, <3, 4>, <4, 4>\}$, что является необходимым и достаточным условием транзитивности ρ.

Отношение ρ антисимметрично, так как $x\ \rho\ y$ и $y\ \rho\ x \rightarrow x = y$ для $\forall\ x, y \in X$:

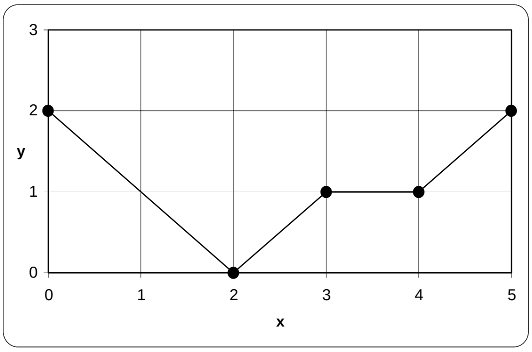
x y   y x
$<1, 1>$ и $<1, 1> \rightarrow 1 = 1$,
$<1, 4>$ $<4, 1> \notin \rho$,
$<2, 2>$ и $<2, 2> \rightarrow 2 = 2$,
$<2, 3>$ и $<3, 2> \notin \rho$,
$<2, 4>$ и $<4, 2> \notin \rho$,
$<3, 3>$ и $<3, 3> \rightarrow 3 = 3$,
$<3, 4>$ и $<4, 3> \notin \rho$,
$<4, 4>$ и $<4, 4> \rightarrow 4 = 4$.



$\rho \cap \rho^{-1} \subseteq I_X$ [28] : что выполняется – $\rho \cap \rho^{-1} = \{<1, 1>, <2, 2>, <3, 3>, <4, 4>\} = I_X$.

Изображаем на координатной плоскости заданное бинарное отношение:
$\rho = \{<1, 1>, <1, 4>, <2, 2>, <2, 3>, <2, 4>, <3, 3>, <3, 4>, <4, 4>\}$

5. График функции f(x) представляет собой ломаную, звенья которой параллельны координатной оси x, либо биссектрисам координатных углов (угловые коэффициенты звеньев равны ±1 или 0). Координаты каждой вершины ломаной являются целыми числами. f(x) определяет отношение ρ_f на множестве $X = [0..5 : x_1\rho_f x_2 \Leftrightarrow$[29] $f(x_1) = f(x_2)]$. Докажите ρ_f эквивалентность на X. Перечислите все классы эквивалентности[30].



Классы эквивалентности:
$[a]_\rho \in [0; 1)$ $\{a, 5 - a\}$,
$[a]_\rho \in [1], [3, 4]$ $\{1\} \cup [3, 4]$,
$[a]_\rho \in (1, 2)$ $\{a, 4 - a\}$,
$[a]_\rho \in [2]$ $\{2\}$

Решение:
Докажем эквивалентность заданного отношения ρ_f на X:
ρ_f – рефлексивно, так как $f(x) = f(x)$,
ρ_f – симметрично, так как $f(x_1) = f(x_2) \rightarrow f(x_2) = f(x_1)$,
ρ_f – транзитивно, так как $f(x_1) = f(x_2)$ и $f(x_2) = f(x_3) \rightarrow f(x_1) = f(x_3)$

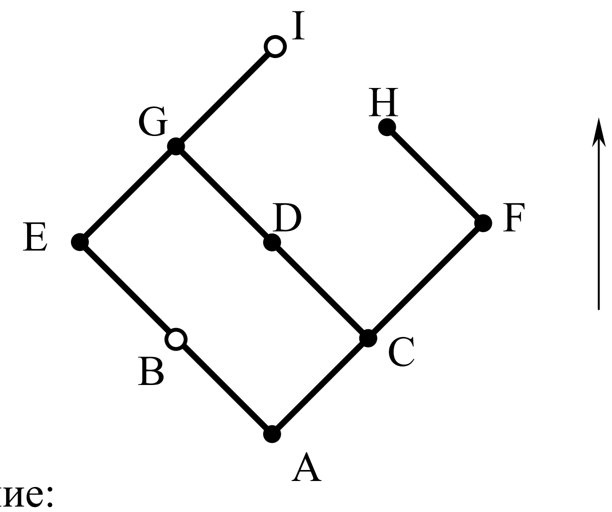
[28] $\cap$ - символ пересечения множеств ($A \cap B = \{x \mid x \in A$ и $x \in B\}$)

[29] $\Leftrightarrow$ - тогда и только тогда, когда выполняется условие …

[30] Классом эквивалентности, порожденным элементом a, называется подмножество $[a]_\rho = \{t \in A \mid a\rho t\}$

Специальные бинарные отношения.

6. В частично упорядоченном множестве[31], заданном диаграммой[32], найдите наибольший, наименьший, минимальный, максимальный элементы. Продолжите заданное отношение частичного порядка до линейного[33].



Решение:

наибольшего элемента нет.

наименьший элемент, он минимальный – A,

максимальные элементы I и H,

Линейный порядок может быть например следующим E, D, F, C, I, G, B, A, H.

$$\rho=\left\{\begin{array}{cccccccccc}
 & A & B & C & D & E & F & G & H & I \\
A & (A,A) & (A,B) & (A,C) & (A,D) & (A,E) & (A,F) & (A,G) & (A,H) & (A,I) \\
B & & (B,B) & & & (B,E) & & (B,G) & & (B,I) \\
C & & & (C,C) & (C,D) & (C,E) & (C,F) & (C,G) & (C,H) & (C,I) \\
D & & & & (D,D) & & & (D,G) & & (D,I) \\
E & & & & & (E,E) & & (E,G) & & (E,I) \\
F & & & & & & (F,F) & & (F,H) & \\
G & & & & & & & (G,G) & & (G,I) \\
H & & & & & & & & (H,H) & \\
I & & & & & & & & & (I,I)
\end{array}\right\}$$

[31] Частично упорядоченное множество – это множество с заданным на нем частичным (линейным) порядком. Рефлексивное, антисимметричное и транзитивное отношение называется отношением частичного порядка на множестве X и обозначается символом «$\prec$».

[32] Называется диаграммой Хассе: схема, где каждый элемент изображается точкой, и если y покрывает x, то соответствующие точки соединяют линией, и x располагают ниже y.

Говорят, что элемент y покрывает элемент x, если не существует такого элемента u, что $x \prec u \prec y$.

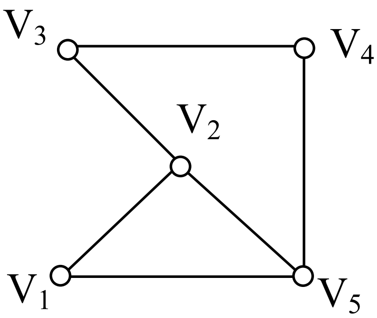
[33] Отношение линейного порядка –если для любого элемента частично упорядоченного множества выполняется одно из условий $x \le y$ или $y \le x$, то множество называется линейно упорядоченным.

Элементы теории графов и сетей.

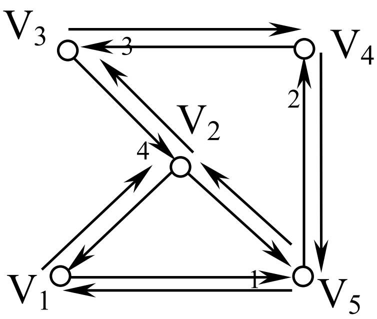
7. Матрица смежности данного орграфа имеет вид $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

не решать.

8. Используя алгоритм Тери[34] определить замкнутый маршрут, проходящий ровно по два раза, по разу в каждом направлении, через каждое ребро графа.



Решение: $V_1 \to V_5 \to V_4 \to V_3 \to V_2 \to V_1 \to V_2 \to V_5 \to V_2 \to V_3 \to V_4 \to V_5 \to V_1$.

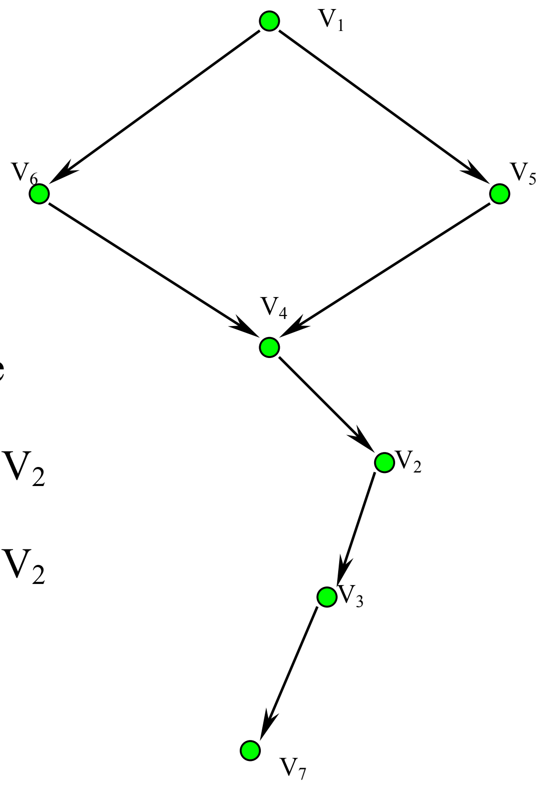


[34] Алгоритм Тери:
- отмечаем прохождение ребра в некотором направлении
- второй раз в этом направлении не движемся
- особо отмечаем ребро, по которому заходим в вершину первый раз
- по особо отмеченному ребру в обратном направлении движемся, если только других возможностей нет.

9. Используя алгоритм фронта волны, найти все минимальные пути из 1-й вершины в последнюю вершину орграфа заданного матрицей смежности.

$$\begin{bmatrix} 0&0&0&0&1&1&0\\ 1&0&1&0&1&0&0\\ 1&1&0&1&1&0&1\\ 0&1&0&0&1&1&0\\ 1&0&0&1&1&1&0\\ 0&0&0&1&1&0&0\\ 1&1&0&1&1&0&0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} \\ V_1\\ V_2\\ V_3\\ V_4\\ V_5\\ V_6\\ V_7 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} V_1&V_2&V_3&V_4&V_5&V_6&V_7 \end{array}\\ \begin{bmatrix} 0&0&0&0&1&1&0\\ 1&0&1&0&1&0&0\\ 1&1&0&1&1&0&1\\ 0&1&0&0&1&1&0\\ 1&0&0&1&1&1&0\\ 0&0&0&1&1&0&0\\ 1&1&0&1&1&0&0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Рисуем подграф[35] заданного ориентированного графа, где указаны все вершины, достижимые из V_1: минимальный путь = 5, число минимальных путей – 2.



Минимальные пути:
$V_1 \rightarrow V_5 \rightarrow V_4 \rightarrow V_2 \rightarrow V_3 \rightarrow V_7$ или
$V_1 \rightarrow V_6 \rightarrow V_4 \rightarrow V_2 \rightarrow V_3 \rightarrow V_7$

[35] *Подграфом* графа называется граф, являющийся подмоделью исходного графа. Иначе говоря, подграф содержит некоторые вершины исходного графа и некоторые рёбра (только те, оба конца которых входят в подграф).

10. Используя алгоритм Форда-Белмана найти все минимальные пути[36] из первой вершины во все достижимые вершины нагруженного[37] орграфа, заданного матрицей длин дуг[38].

$$\begin{bmatrix} \infty & 7 & 1 & \infty & \infty & 2 & \infty & \infty \\ 6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 2 & 6 \\ 4 & \infty & \infty & 5 & \infty & 3 & \infty & \infty \\ 7 & \infty & \infty & \infty & 4 & \infty & 2 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 2 \\ \infty & 6 & \infty & 3 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 5 & \infty & \infty & \infty & 1 & \infty & \infty & 5 \\ 8 & \infty & \infty & \infty & \infty & 11 & \infty & \infty \end{bmatrix}$$

Решение:

$$\left[\begin{array}{ccccccccc} & V_1 & V_2 & V_3 & V_4 & V_5 & V_6 & V_7 & V_8 \\ V_1 & \infty & 7 & 1 & \infty & \infty & 2 & \infty & \infty \\ V_2 & 6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 2 & 6 \\ V_3 & 4 & \infty & \infty & 5 & \infty & 3 & \infty & \infty \\ V_4 & 7 & \infty & \infty & \infty & 4 & \infty & 2 & \infty \\ V_5 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 2 \\ V_6 & \infty & 6 & \infty & 3 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ V_7 & 5 & \infty & \infty & \infty & 1 & \infty & \infty & 5 \\ V_8 & 8 & \infty & \infty & \infty & \infty & 11 & \infty & \infty \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccccccccc} & c_{i1} & c_{i2} & c_{i3} & c_{i4} & c_{i5} & c_{i6} & c_{i7} & c_{i8} \\ c_{1j} & \infty & 7 & 1 & \infty & \infty & 2 & \infty & \infty \\ c_{2j} & 6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 2 & 6 \\ c_{3j} & 4 & \infty & \infty & 5 & \infty & 3 & \infty & \infty \\ c_{4j} & 7 & \infty & \infty & \infty & 4 & \infty & 2 & \infty \\ c_{5j} & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 2 \\ c_{6j} & \infty & 6 & \infty & 3 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ c_{7j} & 5 & \infty & \infty & \infty & 1 & \infty & \infty & 5 \\ c_{8j} & 8 & \infty & \infty & \infty & \infty & 11 & \infty & \infty \end{array}\right]$$

10.1. Строим таблицу значений $\lambda_i^{(k)}$, $k = 0, \ldots, n-1;\ i = 1, \ldots, n.$[39] При этом, если $\lambda_i^{(n-1)} = \infty$, то вершина V_i не достижима из V_1.

$\lambda_i^{(k)}$ - определяется следующим образом:

$\lambda_1^{(0)} = 0,\ \lambda_i^{(0)} = \infty,\ i = 2, \ldots n;$ (считаем любой путь из v в v путем нулевой длины)

при $i = 2, .. n,\ k \geq 0$ справедливо равенство $\lambda_i^{(k+1)} = \min\{\lambda_j^{(k)} + c_{ji}\}$, $1 \leq j \leq n$

а при $i = 1,\ k \geq 0$ справедливо равенство $\lambda_1^{(k+1)} = \min\{0; \min\{\lambda_j^{(k)} + c_{j1}\}\}$, $1 \leq j \leq n$

---

[36] Путь – последовательность вершин и дуг в орграфе $v_1x_1v_2x_2v_3x_3\ldots x_kv_{k+1}$, где $k \geq 1$, $v_i \in V$, $i = 1, \ldots, k+1$, $x_j \in X$, $j = 1, \ldots, k$ дуга x_j имеет вид (v_j, v_{j+1}), соединяющих вершину v_1 и v_{k+1}.
Длиной пути называют сумму длин дуг этого пути. Путь из v в w называется минимальным, если он имеет минимальную длину по сравнению со всеми путями из v в w.

[37] Орграф $D = (V, X)$, $V = \{v_1, v_2, \ldots v_n\}$, $n \geq 2$ называют нагруженным, если на множестве дуг X определена некоторая функция $l\colon X \rightarrow \boldsymbol{R}$, называемую весовой, т.е. для каждой дуги $x \in X$ поставлено в соответствие некоторое действительное число $l(x)$ – длина дуги x.

[38] Матрица длин дуг – квадратная матрица, порядка n: $c_{ij} = \begin{cases} l(v_i, v_j), & (v_i, v_j) \in X; \\ \infty, & (v_i, v_j) \notin X. \end{cases}$

[39] $\lambda_i^{(k)}$ - длина минимального пути из V_1 в V_i, содержащего не более k дуг, если такие пути существуют;
- ∞, если таких путей нет; $i = 1, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots$

В данном случае $1 \le j \le 8$:

k = 1

$\lambda_1^{(1)}$

$$\begin{array}{cccccc} V_1 & & \lambda_j^{(0)} & & & \\ \begin{bmatrix} \infty \\ 6 \\ 4 \\ 7 \\ \infty \\ \infty \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} & + & \begin{bmatrix} 0 \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \end{bmatrix} & \rightarrow \lambda_1^{(1)} = \min\{0; \min\{\begin{bmatrix} \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \end{bmatrix}\}\} = 0; \end{array}$$

$\lambda_2^{(1)}$

$$\begin{array}{cccccc} V_2 & & \lambda_j^{(0)} & & & \\ \begin{bmatrix} 7 \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ 6 \\ \infty \\ \infty \end{bmatrix} & + & \begin{bmatrix} 0 \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 7 \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \end{bmatrix} & \rightarrow \lambda_2^{(1)} = \min\{\begin{bmatrix} 7 \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \end{bmatrix}\} = 7; \end{array}$$

$\lambda_3^{(1)}$

$$\begin{array}{cccccc} V_3 & & \lambda_j^{(0)} & & & \\ \begin{bmatrix} 1 \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \end{bmatrix} & + & \begin{bmatrix} 0 \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 1 \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \end{bmatrix} & \rightarrow \lambda_3^{(1)} = \min\{\begin{bmatrix} 1 \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \end{bmatrix}\} = 1; \end{array}$$

$\lambda_4^{(1)}$

$$\begin{array}{ccccccc} V_4 & & \lambda_j^{(0)} & & & & \\ \begin{bmatrix} \infty \\ \infty \\ 5 \\ \infty \\ \infty \\ 3 \\ \infty \\ \infty \end{bmatrix} & + & \begin{bmatrix} 0 \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \end{bmatrix} & \rightarrow & \lambda_4^{(1)} = \min\left\{ \begin{bmatrix} \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \end{bmatrix} \right\} = \infty; \end{array}$$

$\lambda_5^{(1)}$

$$\begin{array}{ccccccc} V_5 & & \lambda_j^{(0)} & & & & \\ \begin{bmatrix} \infty \\ \infty \\ \infty \\ 4 \\ \infty \\ \infty \\ 1 \\ \infty \end{bmatrix} & + & \begin{bmatrix} 0 \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \end{bmatrix} & \rightarrow & \lambda_5^{(1)} = \min\left\{ \begin{bmatrix} \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \end{bmatrix} \right\} = \infty; \end{array}$$

$\lambda_6^{(1)}$

$$\begin{array}{ccccccc} V_6 & & \lambda_j^{(0)} & & & & \\ \begin{bmatrix} 2 \\ \infty \\ 3 \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ 11 \end{bmatrix} & + & \begin{bmatrix} 0 \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 2 \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \end{bmatrix} & \rightarrow & \lambda_6^{(1)} = \min\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \end{bmatrix} \right\} = 2; \end{array}$$

$\lambda_7^{(1)}$

$$\begin{array}{cccc} V_7 & \lambda_j^{(0)} & & \\ \begin{bmatrix} \infty \\ 2 \\ \infty \\ 2 \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \end{bmatrix} + & \begin{bmatrix} 0 \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \end{bmatrix} & \rightarrow \lambda_7^{(1)} = \min\left\{ \begin{bmatrix} \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \end{bmatrix} \right\} = \infty; \end{array}$$

$\lambda_8^{(1)}$

$$\begin{array}{cccc} V_8 & \lambda_j^{(0)} & & \\ \begin{bmatrix} \infty \\ 6 \\ \infty \\ \infty \\ 2 \\ \infty \\ 5 \\ \infty \end{bmatrix} + & \begin{bmatrix} 0 \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \end{bmatrix} & \rightarrow \lambda_8^{(1)} = \min\left\{ \begin{bmatrix} \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \end{bmatrix} \right\} = \infty; \end{array}$$

k = 2

$\lambda_1^{(2)}$

$$\begin{array}{cccc} V_1 & \lambda_j^{(1)} & & \\ \begin{bmatrix} \infty \\ 6 \\ 4 \\ 7 \\ \infty \\ \infty \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} + & \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 1 \\ \infty \\ \infty \\ 2 \\ \infty \\ \infty \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} \infty \\ 13 \\ 5 \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \end{bmatrix} & \rightarrow \lambda_1^{(2)} = \min\left\{0; \min\left\{ \begin{bmatrix} \infty \\ 13 \\ 5 \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \end{bmatrix} \right\}\right\} = 0; \end{array}$$

$\lambda_2^{(2)}$

$$\begin{array}{ccccccc} V_2 & & \lambda_j^{(1)} & & & & \\ \begin{bmatrix} 7 \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ 6 \\ \infty \\ \infty \end{bmatrix} & + & \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 1 \\ \infty \\ \infty \\ 2 \\ \infty \\ \infty \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 7 \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ 8 \\ \infty \\ \infty \end{bmatrix} & \rightarrow & \lambda_2^{(2)} = \min\{\begin{bmatrix} 7 \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ 8 \\ \infty \\ \infty \end{bmatrix}\} = 7; \end{array}$$

$\lambda_3^{(2)}$

$$\begin{array}{ccccccc} V_3 & & \lambda_j^{(1)} & & & & \\ \begin{bmatrix} 1 \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \end{bmatrix} & + & \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 1 \\ \infty \\ \infty \\ 2 \\ \infty \\ \infty \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 1 \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \end{bmatrix} & \rightarrow & \lambda_3^{(2)} = \min\{\begin{bmatrix} 1 \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \end{bmatrix}\} = 1; \end{array}$$

$\lambda_4^{(2)}$

$$\begin{array}{ccccccc} V_4 & & \lambda_j^{(1)} & & & & \\ \begin{bmatrix} \infty \\ \infty \\ 5 \\ \infty \\ \infty \\ 3 \\ \infty \\ \infty \end{bmatrix} & + & \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 1 \\ \infty \\ \infty \\ 2 \\ \infty \\ \infty \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} \infty \\ \infty \\ 6 \\ \infty \\ \infty \\ 5 \\ \infty \\ \infty \end{bmatrix} & \rightarrow & \lambda_4^{(2)} = \min\{\begin{bmatrix} \infty \\ \infty \\ 6 \\ \infty \\ \infty \\ 5 \\ \infty \\ \infty \end{bmatrix}\} = 5; \end{array}$$

$\lambda_5^{(2)}$

$$\begin{array}{cccc} V_5 & & \lambda_j^{(1)} & \\ \begin{bmatrix} \infty \\ \infty \\ \infty \\ 4 \\ \infty \\ \infty \\ 1 \\ \infty \end{bmatrix} & + & \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 1 \\ \infty \\ \infty \\ 2 \\ \infty \\ \infty \end{bmatrix} & = \begin{bmatrix} \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \end{bmatrix} \end{array} \rightarrow \lambda_5^{(2)} = \min\{\begin{bmatrix} \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \end{bmatrix}\} = \infty;$$

$\lambda_6^{(2)}$

$$\begin{array}{cccc} V_6 & & \lambda_j^{(1)} & \\ \begin{bmatrix} 2 \\ \infty \\ 3 \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ 11 \end{bmatrix} & + & \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 1 \\ \infty \\ \infty \\ 2 \\ \infty \\ \infty \end{bmatrix} & = \begin{bmatrix} 2 \\ \infty \\ 4 \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \end{bmatrix} \end{array} \rightarrow \lambda_6^{(2)} = \min\{\begin{bmatrix} 2 \\ \infty \\ 4 \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \end{bmatrix}\} = 2;$$

$\lambda_7^{(2)}$

$$\begin{array}{cccc} V_7 & & \lambda_j^{(1)} & \\ \begin{bmatrix} \infty \\ 2 \\ \infty \\ 2 \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \end{bmatrix} & + & \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 1 \\ \infty \\ \infty \\ 2 \\ \infty \\ \infty \end{bmatrix} & = \begin{bmatrix} \infty \\ 9 \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \end{bmatrix} \end{array} \rightarrow \lambda_7^{(1)} = \min\{\begin{bmatrix} \infty \\ 9 \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \end{bmatrix}\} = 9;$$

$\lambda_8^{(2)}$

$$\begin{array}{ccccc} V_8 & & \lambda_j^{(1)} & & \\ \begin{bmatrix} \infty \\ 6 \\ \infty \\ \infty \\ 2 \\ \infty \\ 5 \\ \infty \end{bmatrix} & + & \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 1 \\ \infty \\ \infty \\ 2 \\ \infty \\ \infty \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} \infty \\ 13 \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \end{bmatrix} \end{array} \rightarrow \lambda_8^{(2)} = \min\{\begin{bmatrix} \infty \\ 13 \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \end{bmatrix}\} = 13;$$

k = 3

$\lambda_1^{(3)}$

$$\begin{array}{ccccc} V_1 & & \lambda_j^{(2)} & & \\ \begin{bmatrix} \infty \\ 6 \\ 4 \\ 7 \\ \infty \\ \infty \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} & + & \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 1 \\ 5 \\ \infty \\ 2 \\ 9 \\ 13 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} \infty \\ 13 \\ 5 \\ 12 \\ \infty \\ \infty \\ 14 \\ 21 \end{bmatrix} \end{array} \rightarrow \lambda_1^{(3)} = \min\{0; \min\{\begin{bmatrix} \infty \\ 13 \\ 5 \\ 12 \\ \infty \\ \infty \\ 14 \\ 21 \end{bmatrix}\}\} = 0;$$

$\lambda_2^{(3)}$

$$\begin{array}{ccccc} V_2 & & \lambda_j^{(2)} & & \\ \begin{bmatrix} 7 \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ 6 \\ \infty \\ \infty \end{bmatrix} & + & \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 1 \\ 5 \\ \infty \\ 2 \\ 9 \\ 13 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 7 \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ 8 \\ \infty \\ \infty \end{bmatrix} \end{array} \rightarrow \lambda_2^{(3)} = \min\{\begin{bmatrix} 7 \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ 8 \\ \infty \\ \infty \end{bmatrix}\} = 7;$$

$\lambda_3^{(3)}$

$$\begin{array}{ccccccc} V_3 & & \lambda_j^{(2)} & & & & \\ \begin{bmatrix}1\\ \infty\\ \infty\\ \infty\\ \infty\\ \infty\\ \infty\\ \infty\end{bmatrix} & + & \begin{bmatrix}0\\ 7\\ 1\\ 5\\ \infty\\ 2\\ 9\\ 13\end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix}1\\ \infty\\ \infty\\ \infty\\ \infty\\ \infty\\ \infty\\ \infty\end{bmatrix} & \rightarrow & \lambda_3^{(3)} = \min\left\{\begin{bmatrix}1\\ \infty\\ \infty\\ \infty\\ \infty\\ \infty\\ \infty\\ \infty\end{bmatrix}\right\} = 1; \end{array}$$

$\lambda_4^{(3)}$

$$\begin{array}{ccccccc} V_4 & & \lambda_j^{(2)} & & & & \\ \begin{bmatrix}\infty\\ \infty\\ 5\\ \infty\\ \infty\\ 3\\ \infty\\ \infty\end{bmatrix} & + & \begin{bmatrix}0\\ 7\\ 1\\ 5\\ \infty\\ 2\\ 9\\ 13\end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix}\infty\\ \infty\\ 6\\ \infty\\ \infty\\ 5\\ \infty\\ \infty\end{bmatrix} & \rightarrow & \lambda_4^{(3)} = \min\left\{\begin{bmatrix}\infty\\ \infty\\ 6\\ \infty\\ \infty\\ 5\\ \infty\\ \infty\end{bmatrix}\right\} = 5; \end{array}$$

$\lambda_5^{(3)}$

$$\begin{array}{ccccccc} V_5 & & \lambda_j^{(2)} & & & & \\ \begin{bmatrix}\infty\\ \infty\\ \infty\\ 4\\ \infty\\ \infty\\ 1\\ \infty\end{bmatrix} & + & \begin{bmatrix}0\\ 7\\ 1\\ 5\\ \infty\\ 2\\ 9\\ 13\end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix}\infty\\ \infty\\ \infty\\ 9\\ \infty\\ \infty\\ 10\\ \infty\end{bmatrix} & \rightarrow & \lambda_5^{(3)} = \min\left\{\begin{bmatrix}\infty\\ \infty\\ \infty\\ 9\\ \infty\\ \infty\\ 10\\ \infty\end{bmatrix}\right\} = 9; \end{array}$$

$\lambda_6^{(3)}$

$$\begin{array}{ccccccc} V_6 & & \lambda_j^{(2)} & & & & \\ \begin{bmatrix} 2 \\ \infty \\ 3 \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ 11 \end{bmatrix} & + & \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 1 \\ 5 \\ \infty \\ 2 \\ 9 \\ 13 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 2 \\ \infty \\ 4 \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ 24 \end{bmatrix} & \rightarrow & \lambda_6^{(3)} = \min\{\begin{bmatrix} 2 \\ \infty \\ 4 \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ 24 \end{bmatrix}\} = 2; \end{array}$$

$\lambda_7^{(3)}$

$$\begin{array}{ccccccc} V_7 & & \lambda_j^{(2)} & & & & \\ \begin{bmatrix} \infty \\ 2 \\ \infty \\ 2 \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \end{bmatrix} & + & \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 1 \\ 5 \\ \infty \\ 2 \\ 9 \\ 13 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} \infty \\ 9 \\ \infty \\ 7 \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \end{bmatrix} & \rightarrow & \lambda_7^{(3)} = \min\{\begin{bmatrix} \infty \\ 9 \\ \infty \\ 7 \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \end{bmatrix}\} = 7; \end{array}$$

$\lambda_8^{(3)}$

$$\begin{array}{ccccccc} V_8 & & \lambda_j^{(2)} & & & & \\ \begin{bmatrix} \infty \\ 6 \\ \infty \\ \infty \\ 2 \\ \infty \\ 5 \\ \infty \end{bmatrix} & + & \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 1 \\ 5 \\ \infty \\ 2 \\ 9 \\ 13 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} \infty \\ 13 \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ 14 \\ \infty \end{bmatrix} & \rightarrow & \lambda_8^{(3)} = \min\{\begin{bmatrix} \infty \\ 13 \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ 14 \\ \infty \end{bmatrix}\} = 13; \end{array}$$

k = 4

$\lambda_1^{(4)}$

$$\begin{array}{cccccccc} V_1 & & \lambda_j^{(3)} \\ \begin{bmatrix} \infty \\ 6 \\ 4 \\ 7 \\ \infty \\ \infty \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} & + & \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 1 \\ 5 \\ 9 \\ 2 \\ 7 \\ 13 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} \infty \\ 13 \\ 5 \\ 12 \\ \infty \\ \infty \\ 12 \\ 21 \end{bmatrix} \end{array} \rightarrow \lambda_1^{(4)} = \min\{0; \min\{\begin{bmatrix} \infty \\ 13 \\ 5 \\ 12 \\ \infty \\ \infty \\ 12 \\ 21 \end{bmatrix}\}\} = 0;$$

$\lambda_2^{(4)}$

$$\begin{array}{cccccccc} V_2 & & \lambda_j^{(3)} \\ \begin{bmatrix} 7 \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ 6 \\ \infty \\ \infty \end{bmatrix} & + & \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 1 \\ 5 \\ 9 \\ 2 \\ 7 \\ 13 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 7 \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ 8 \\ \infty \\ \infty \end{bmatrix} \end{array} \rightarrow \lambda_2^{(4)} = \min\{\begin{bmatrix} 7 \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ 8 \\ \infty \\ \infty \end{bmatrix}\} = 7;$$

$\lambda_3^{(4)}$

$$\begin{array}{cccccccc} V_3 & & \lambda_j^{(3)} \\ \begin{bmatrix} 1 \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \end{bmatrix} & + & \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 1 \\ 5 \\ 9 \\ 2 \\ 7 \\ 13 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 1 \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \end{bmatrix} \end{array} \rightarrow \lambda_3^{(4)} = \min\{\begin{bmatrix} 1 \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \end{bmatrix}\} = 1;$$

$\lambda_4^{(4)}$

$V_4 \qquad \lambda_j^{(3)}$

$$\begin{bmatrix}\infty\\\infty\\5\\\infty\\\infty\\3\\\infty\\\infty\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\7\\1\\5\\9\\2\\7\\13\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\infty\\\infty\\6\\\infty\\\infty\\5\\\infty\\\infty\end{bmatrix}\rightarrow \lambda_4^{(4)}=\min\{\begin{bmatrix}\infty\\\infty\\6\\\infty\\\infty\\5\\\infty\\\infty\end{bmatrix}\}=5;$$

$\lambda_5^{(4)}$

$V_5 \qquad \lambda_j^{(3)}$

$$\begin{bmatrix}\infty\\\infty\\\infty\\4\\\infty\\\infty\\1\\\infty\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\7\\1\\5\\9\\2\\7\\13\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\infty\\\infty\\\infty\\9\\\infty\\\infty\\8\\\infty\end{bmatrix}\rightarrow \lambda_5^{(4)}=\min\{\begin{bmatrix}\infty\\\infty\\\infty\\9\\\infty\\\infty\\8\\\infty\end{bmatrix}\}=8;$$

$\lambda_6^{(4)}$

$V_6 \qquad \lambda_j^{(3)}$

$$\begin{bmatrix}2\\\infty\\3\\\infty\\\infty\\\infty\\\infty\\11\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\7\\1\\5\\9\\2\\7\\13\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\\infty\\4\\\infty\\\infty\\\infty\\\infty\\24\end{bmatrix}\rightarrow \lambda_6^{(4)}=\min\{\begin{bmatrix}2\\\infty\\4\\\infty\\\infty\\\infty\\\infty\\24\end{bmatrix}\}=2;$$

$\lambda_7^{(4)}$

$$\begin{array}{ccccc} V_7 & & \lambda_j^{(3)} & & \\ \begin{bmatrix} \infty \\ 2 \\ \infty \\ 2 \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \end{bmatrix} & + & \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 1 \\ 5 \\ 9 \\ 2 \\ 7 \\ 13 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} \infty \\ 9 \\ \infty \\ 7 \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \end{bmatrix} \end{array} \rightarrow \lambda_7^{(4)} = \min\{\begin{bmatrix} \infty \\ 9 \\ \infty \\ 7 \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \end{bmatrix}\} = 7;$$

$\lambda_8^{(4)}$

$$\begin{array}{ccccc} V_8 & & \lambda_j^{(3)} & & \\ \begin{bmatrix} \infty \\ 6 \\ \infty \\ \infty \\ 2 \\ \infty \\ 5 \\ \infty \end{bmatrix} & + & \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 1 \\ 5 \\ 9 \\ 2 \\ 7 \\ 13 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} \infty \\ 13 \\ \infty \\ \infty \\ 11 \\ \infty \\ 12 \\ \infty \end{bmatrix} \end{array} \rightarrow \lambda_8^{(4)} = \min\{\begin{bmatrix} \infty \\ 13 \\ \infty \\ \infty \\ 11 \\ \infty \\ 12 \\ \infty \end{bmatrix}\} = 11;$$

k = 5

$\lambda_1^{(5)}$

$$\begin{array}{ccccc} V_1 & & \lambda_j^{(4)} & & \\ \begin{bmatrix} \infty \\ 6 \\ 4 \\ 7 \\ \infty \\ \infty \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} & + & \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 1 \\ 5 \\ 8 \\ 2 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} \infty \\ 13 \\ 5 \\ 12 \\ \infty \\ \infty \\ 12 \\ 19 \end{bmatrix} \end{array} \rightarrow \lambda_1^{(5)} = \min\{0; \min\{\begin{bmatrix} \infty \\ 13 \\ 5 \\ 12 \\ \infty \\ \infty \\ 12 \\ 19 \end{bmatrix}\}\} = 0;$$

$\lambda_2^{(5)}$

$$\begin{array}{ccccccc} V_2 & & \lambda_j^{(4)} & & & & \\ \begin{bmatrix} 7 \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ 6 \\ \infty \\ \infty \end{bmatrix} & + & \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 1 \\ 5 \\ 8 \\ 2 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 7 \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ 8 \\ \infty \\ \infty \end{bmatrix} & \rightarrow & \lambda_2^{(5)} = \min\left\{\begin{bmatrix} 7 \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ 8 \\ \infty \\ \infty \end{bmatrix}\right\} = 7; \end{array}$$

$\lambda_3^{(5)}$

$$\begin{array}{ccccccc} V_3 & & \lambda_j^{(4)} & & & & \\ \begin{bmatrix} 1 \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \end{bmatrix} & + & \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 1 \\ 5 \\ 8 \\ 2 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 1 \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \end{bmatrix} & \rightarrow & \lambda_3^{(5)} = \min\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \end{bmatrix}\right\} = 1; \end{array}$$

$\lambda_4^{(5)}$

$$\begin{array}{ccccccc} V_4 & & \lambda_j^{(4)} & & & & \\ \begin{bmatrix} \infty \\ \infty \\ 5 \\ \infty \\ \infty \\ 3 \\ \infty \\ \infty \end{bmatrix} & + & \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 1 \\ 5 \\ 8 \\ 2 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} \infty \\ \infty \\ 6 \\ \infty \\ \infty \\ 5 \\ \infty \\ \infty \end{bmatrix} & \rightarrow & \lambda_4^{(5)} = \min\left\{\begin{bmatrix} \infty \\ \infty \\ 6 \\ \infty \\ \infty \\ 5 \\ \infty \\ \infty \end{bmatrix}\right\} = 5; \end{array}$$

$\lambda_5^{(5)}$

$$\begin{array}{ccccc} V_5 & & \lambda_j^{(4)} & & \\ \begin{bmatrix} \infty \\ \infty \\ \infty \\ 4 \\ \infty \\ \infty \\ 1 \\ \infty \end{bmatrix} & + & \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 1 \\ 5 \\ 8 \\ 2 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} \infty \\ \infty \\ \infty \\ 9 \\ \infty \\ \infty \\ 8 \\ \infty \end{bmatrix} \end{array} \rightarrow \lambda_5^{(5)} = \min\{\begin{bmatrix} \infty \\ \infty \\ \infty \\ 9 \\ \infty \\ \infty \\ 8 \\ \infty \end{bmatrix}\} = 8;$$

$\lambda_6^{(5)}$

$$\begin{array}{ccccc} V_6 & & \lambda_j^{(4)} & & \\ \begin{bmatrix} 2 \\ \infty \\ 3 \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ 11 \end{bmatrix} & + & \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 1 \\ 5 \\ 8 \\ 2 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 2 \\ \infty \\ 4 \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ 22 \end{bmatrix} \end{array} \rightarrow \lambda_6^{(5)} = \min\{\begin{bmatrix} 2 \\ \infty \\ 4 \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ 22 \end{bmatrix}\} = 2;$$

$\lambda_7^{(5)}$

$$\begin{array}{ccccc} V_7 & & \lambda_j^{(4)} & & \\ \begin{bmatrix} \infty \\ 2 \\ \infty \\ 2 \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \end{bmatrix} & + & \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 1 \\ 5 \\ 8 \\ 2 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} \infty \\ 9 \\ \infty \\ 7 \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \end{bmatrix} \end{array} \rightarrow \lambda_7^{(5)} = \min\{\begin{bmatrix} \infty \\ 9 \\ \infty \\ 7 \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \end{bmatrix}\} = 7;$$

$\lambda_8^{(5)}$

$V_8 \qquad \lambda_j^{(4)}$

$$\begin{bmatrix}\infty\\6\\\infty\\\infty\\2\\\infty\\5\\\infty\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\7\\1\\5\\8\\2\\7\\11\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\infty\\13\\\infty\\\infty\\10\\\infty\\12\\\infty\end{bmatrix}\rightarrow \lambda_8^{(5)}=\min\{\begin{bmatrix}\infty\\13\\\infty\\\infty\\10\\\infty\\12\\\infty\end{bmatrix}\}=10;$$

k = 6

$\lambda_1^{(6)}$

$V_1 \qquad \lambda_j^{(5)}$

$$\begin{bmatrix}\infty\\6\\4\\7\\\infty\\\infty\\5\\8\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\7\\1\\5\\8\\2\\7\\10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\infty\\13\\5\\12\\\infty\\\infty\\14\\21\end{bmatrix}\rightarrow \lambda_1^{(6)}=\min\{0;\min\{\begin{bmatrix}\infty\\13\\5\\12\\\infty\\\infty\\14\\21\end{bmatrix}\}\}=0;$$

$\lambda_2^{(6)}$

$V_2 \qquad \lambda_j^{(5)}$

$$\begin{bmatrix}7\\\infty\\\infty\\\infty\\\infty\\6\\\infty\\\infty\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\7\\1\\5\\8\\2\\7\\10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\\infty\\\infty\\\infty\\\infty\\8\\\infty\\\infty\end{bmatrix}\rightarrow \lambda_2^{(6)}=\min\{\begin{bmatrix}7\\\infty\\\infty\\\infty\\\infty\\8\\\infty\\\infty\end{bmatrix}\}=7;$$

$\lambda_3^{(6)}$

$$\begin{array}{cccccc} V_3 & & \lambda_j^{(5)} & & & \\ \begin{bmatrix} 1 \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \end{bmatrix} & + & \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 1 \\ 5 \\ 8 \\ 2 \\ 7 \\ 10 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 1 \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \end{bmatrix} & \rightarrow \lambda_3^{(6)} = \min\{\begin{bmatrix} 1 \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \end{bmatrix}\} = 1; \end{array}$$

$\lambda_4^{(6)}$

$$\begin{array}{cccccc} V_4 & & \lambda_j^{(5)} & & & \\ \begin{bmatrix} \infty \\ \infty \\ 5 \\ \infty \\ \infty \\ 3 \\ \infty \\ \infty \end{bmatrix} & + & \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 1 \\ 5 \\ 8 \\ 2 \\ 7 \\ 10 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} \infty \\ \infty \\ 6 \\ \infty \\ \infty \\ 5 \\ \infty \\ \infty \end{bmatrix} & \rightarrow \lambda_4^{(6)} = \min\{\begin{bmatrix} \infty \\ \infty \\ 6 \\ \infty \\ \infty \\ 5 \\ \infty \\ \infty \end{bmatrix}\} = 5; \end{array}$$

$\lambda_5^{(6)}$

$$\begin{array}{cccccc} V_5 & & \lambda_j^{(5)} & & & \\ \begin{bmatrix} \infty \\ \infty \\ \infty \\ 4 \\ \infty \\ \infty \\ 1 \\ \infty \end{bmatrix} & + & \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 1 \\ 5 \\ 8 \\ 2 \\ 7 \\ 10 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} \infty \\ \infty \\ \infty \\ 9 \\ \infty \\ \infty \\ 8 \\ \infty \end{bmatrix} & \rightarrow \lambda_5^{(6)} = \min\{\begin{bmatrix} \infty \\ \infty \\ \infty \\ 9 \\ \infty \\ \infty \\ 8 \\ \infty \end{bmatrix}\} = 8; \end{array}$$

$\lambda_6^{(6)}$

$$\begin{array}{cccc} V_6 & & \lambda_j^{(5)} & \\ \begin{bmatrix} 2 \\ \infty \\ 3 \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ 11 \end{bmatrix} & + & \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 1 \\ 5 \\ 8 \\ 2 \\ 7 \\ 10 \end{bmatrix} & = \begin{bmatrix} 2 \\ \infty \\ 4 \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ 21 \end{bmatrix} \rightarrow \lambda_6^{(6)} = \min\{\begin{bmatrix} 2 \\ \infty \\ 4 \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ 21 \end{bmatrix}\} = 2; \end{array}$$

$\lambda_7^{(6)}$

$$\begin{array}{cccc} V_7 & & \lambda_j^{(5)} & \\ \begin{bmatrix} \infty \\ 2 \\ \infty \\ 2 \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \end{bmatrix} & + & \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 1 \\ 5 \\ 8 \\ 2 \\ 7 \\ 10 \end{bmatrix} & = \begin{bmatrix} \infty \\ 9 \\ \infty \\ 7 \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \end{bmatrix} \rightarrow \lambda_7^{(6)} = \min\{\begin{bmatrix} \infty \\ 9 \\ \infty \\ 7 \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \end{bmatrix}\} = 7; \end{array}$$

$\lambda_8^{(6)}$

$$\begin{array}{cccc} V_8 & & \lambda_j^{(5)} & \\ \begin{bmatrix} \infty \\ 6 \\ \infty \\ \infty \\ 2 \\ \infty \\ 5 \\ \infty \end{bmatrix} & + & \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 1 \\ 5 \\ 8 \\ 2 \\ 7 \\ 10 \end{bmatrix} & = \begin{bmatrix} \infty \\ 13 \\ \infty \\ \infty \\ 10 \\ \infty \\ 12 \\ \infty \end{bmatrix} \rightarrow \lambda_8^{(6)} = \min\{\begin{bmatrix} \infty \\ 13 \\ \infty \\ \infty \\ 10 \\ \infty \\ 12 \\ \infty \end{bmatrix}\} = 10; \end{array}$$

k = 7

$\lambda_1^{(7)}$

$$\begin{array}{cccccc} V_1 & & \lambda_j^{(6)} & & & \\ \begin{bmatrix} \infty \\ 6 \\ 4 \\ 7 \\ \infty \\ \infty \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} & + & \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 1 \\ 5 \\ 8 \\ 2 \\ 7 \\ 10 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} \infty \\ 13 \\ 5 \\ 12 \\ \infty \\ \infty \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix} & \rightarrow \lambda_1^{(7)} = \min\{0; \min\{\begin{bmatrix} \infty \\ 13 \\ 5 \\ 12 \\ \infty \\ \infty \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}\}\} = 0; \end{array}$$

$\lambda_2^{(7)}$

$$\begin{array}{cccccc} V_2 & & \lambda_j^{(6)} & & & \\ \begin{bmatrix} 7 \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ 6 \\ \infty \\ \infty \end{bmatrix} & + & \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 1 \\ 5 \\ 8 \\ 2 \\ 7 \\ 10 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 7 \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ 8 \\ \infty \\ \infty \end{bmatrix} & \rightarrow \lambda_2^{(7)} = \min\{\begin{bmatrix} 7 \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ 8 \\ \infty \\ \infty \end{bmatrix}\} = 7; \end{array}$$

$\lambda_3^{(7)}$

$$\begin{array}{cccccc} V_3 & & \lambda_j^{(6)} & & & \\ \begin{bmatrix} 1 \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \end{bmatrix} & + & \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 1 \\ 5 \\ 8 \\ 2 \\ 7 \\ 10 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 1 \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \end{bmatrix} & \rightarrow \lambda_3^{(7)} = \min\{\begin{bmatrix} 1 \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \end{bmatrix}\} = 1; \end{array}$$

$\lambda_4^{(7)}$

$$\begin{array}{cccc} V_4 & & \lambda_j^{(6)} & \\ \begin{bmatrix} \infty \\ \infty \\ 5 \\ \infty \\ \infty \\ 3 \\ \infty \\ \infty \end{bmatrix} & + & \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 1 \\ 5 \\ 8 \\ 2 \\ 7 \\ 10 \end{bmatrix} & = \begin{bmatrix} \infty \\ \infty \\ 6 \\ \infty \\ \infty \\ 5 \\ \infty \\ \infty \end{bmatrix} \end{array} \rightarrow \lambda_4^{(7)} = \min\{\begin{bmatrix} \infty \\ \infty \\ 6 \\ \infty \\ \infty \\ 5 \\ \infty \\ \infty \end{bmatrix}\} = 5;$$

$\lambda_5^{(7)}$

$$\begin{array}{cccc} V_5 & & \lambda_j^{(6)} & \\ \begin{bmatrix} \infty \\ \infty \\ \infty \\ 4 \\ \infty \\ \infty \\ 1 \\ \infty \end{bmatrix} & + & \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 1 \\ 5 \\ 8 \\ 2 \\ 7 \\ 10 \end{bmatrix} & = \begin{bmatrix} \infty \\ \infty \\ \infty \\ 9 \\ \infty \\ \infty \\ 8 \\ \infty \end{bmatrix} \end{array} \rightarrow \lambda_5^{(7)} = \min\{\begin{bmatrix} \infty \\ \infty \\ \infty \\ 9 \\ \infty \\ \infty \\ 8 \\ \infty \end{bmatrix}\} = 8;$$

$\lambda_6^{(7)}$

$$\begin{array}{cccc} V_6 & & \lambda_j^{(6)} & \\ \begin{bmatrix} 2 \\ \infty \\ 3 \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ 11 \end{bmatrix} & + & \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 1 \\ 5 \\ 8 \\ 2 \\ 7 \\ 10 \end{bmatrix} & = \begin{bmatrix} 2 \\ \infty \\ 4 \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ 21 \end{bmatrix} \end{array} \rightarrow \lambda_6^{(7)} = \min\{\begin{bmatrix} 2 \\ \infty \\ 4 \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ 21 \end{bmatrix}\} = 2;$$

$\lambda_7^{(7)}$

$V_7 \qquad \lambda_j^{(6)}$

$$\begin{bmatrix} \infty \\ 2 \\ \infty \\ 2 \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 1 \\ 5 \\ 8 \\ 2 \\ 7 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \infty \\ 9 \\ \infty \\ 7 \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \end{bmatrix} \rightarrow \lambda_7^{(7)} = \min\{\begin{bmatrix} \infty \\ 9 \\ \infty \\ 7 \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \end{bmatrix}\} = 7;$$

$\lambda_8^{(7)}$

$V_8 \qquad \lambda_j^{(6)}$

$$\begin{bmatrix} \infty \\ 6 \\ \infty \\ \infty \\ 2 \\ \infty \\ 5 \\ \infty \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 1 \\ 5 \\ 8 \\ 2 \\ 7 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \infty \\ 13 \\ \infty \\ \infty \\ 10 \\ \infty \\ 12 \\ \infty \end{bmatrix} \rightarrow \lambda_8^{(7)} = \min\{\begin{bmatrix} \infty \\ 13 \\ \infty \\ \infty \\ 10 \\ \infty \\ 12 \\ \infty \end{bmatrix}\} = 10;$$

$$\begin{bmatrix} \infty & 7 & 1 & \infty & \infty & 2 & \infty & \infty \\ 6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 2 & 6 \\ 4 & \infty & \infty & 5 & \infty & 3 & \infty & \infty \\ 7 & \infty & \infty & \infty & 4 & \infty & 2 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 2 \\ \infty & 6 & \infty & 3 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 5 & \infty & \infty & \infty & 1 & \infty & \infty & 5 \\ 8 & \infty & \infty & \infty & \infty & 11 & \infty & \infty \end{bmatrix} \to \begin{array}{cc} & \begin{matrix} c_{i1} & c_{i2} & c_{i3} & c_{i4} & c_{i5} & c_{i6} & c_{i7} & c_{i8} \end{matrix} \\ \begin{matrix} c_{1j} \\ c_{2j} \\ c_{3j} \\ c_{4j} \\ c_{5j} \\ c_{6j} \\ c_{7j} \\ c_{8j} \end{matrix} & \begin{bmatrix} \infty & 7 & 1 & \infty & \infty & 2 & \infty & \infty \\ 6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 2 & 6 \\ 4 & \infty & \infty & 5 & \infty & 3 & \infty & \infty \\ 7 & \infty & \infty & \infty & 4 & \infty & 2 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 2 \\ \infty & 6 & \infty & 3 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 5 & \infty & \infty & \infty & 1 & \infty & \infty & 5 \\ 8 & \infty & \infty & \infty & \infty & 11 & \infty & \infty \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} \lambda_i^{(0)} & \lambda_i^{(1)} & \lambda_i^{(2)} & \lambda_i^{(3)} & \lambda_i^{(4)} & \lambda_i^{(5)} & \lambda_i^{(6)} & \lambda_i^{(7)} \end{matrix} \\ \begin{matrix} i=1 \\ i=2 \\ i=3 \\ i=4 \\ i=5 \\ i=6 \\ i=7 \\ i=8 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \infty & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ \infty & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \infty & \infty & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ \infty & \infty & \infty & 9 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ \infty & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ \infty & \infty & 9 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ \infty & \infty & 13 & 13 & 11 & 10 & 10 & 10 \end{bmatrix} \end{array}$$

На матрице минимальных путей указан $V_1V_6V_4V_7V_5V_8$ – искомый минимальный путь из V_1 в V_8.

Определяем искомые минимальные пути:
$V_1 \to V_2$, величина $\lambda_i^{(n-1)} = \lambda_2^7 = 7$ выражает длину минимального пути из V_1 в V_2.
Определяем минимальное число $k_1 \geq 1$, при котором выполняется равенство $\lambda_2^{(k_1)} = \lambda_2^{(1)} = \lambda_2^{(7)} \to k_1 = 1$, т.е. минимальное число дуг, соединяющих V_1 и V_2 равно 1. Определяем последовательность номеров i_1, i_2 где $i_1 = 2$:
Тогда $i_1, i_2 = 2, 1 \to V_1V_2$ – искомый минимальный путь.

$V_1 \to V_3$, величина $\lambda_3^7 = 1$ выражает длину минимального пути из V_1 в V_3.
Определяем минимальное число $k_1 \geq 1$, при котором выполняется равенство $\lambda_3^{(k_1)} = \lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(7)} \to k_1 = 1$, т.е. минимальное число дуг, соединяющих V_1 и V_3 равно 1. Определяем последовательность номеров i_1, i_2 где $i_1 = 3$:
Тогда $i_1, i_2 = 3, 1 \to V_1V_6$ – искомый минимальный путь.

$V_1 \to V_4$, величина $\lambda_4^7 = 5$ выражает длину минимального пути из V_1 в V_4.
Определяем минимальное число $k_1 \geq 1$, при котором выполняется равенство $\lambda_4^{(k_1)} = \lambda_4^{(2)} = \lambda_4^{(7)} \to k_1 = 2$, т.е. минимальное число дуг, соединяющих V_1 и V_4 равно 2. Определяем последовательность номеров i_1, i_2, i_3 где $i_1 = 4$:

$$\lambda_{i_2}^{(k_1-1)} + c_{i_2 i_1} = \min\{\lambda_{i_2}^{(1)} + c_{i_2 4}\} = \min\left\{ \begin{matrix} \lambda_{i_2}^{(1)} \\ 0 \\ 7 \\ 1 \\ \infty \\ \infty \\ 2 \\ \infty \\ \infty \end{matrix} + \begin{matrix} c_{i_2 4} \\ \infty \\ \infty \\ 5 \\ \infty \\ \infty \\ 3 \\ \infty \\ \infty \end{matrix} \right\} = \min\left\{ \begin{matrix} \infty \\ \infty \\ 6 \\ \infty \\ \infty \\ 5 \\ \infty \\ \infty \end{matrix} \right\} = \lambda_6^{(1)} + c_{64} = 2 + 3 = 5 = \lambda_4^{(2)} = 5 \rightarrow$$

$i_2 = 6$;

$$\lambda_{i_3}^{(0)} + c_{i_3 i_2} = \min\{\lambda_{i_5}^{(0)} + c_{i_5 6}\} = \min\left\{ \begin{matrix} \lambda_{i_3}^{(0)} \\ 0 \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \end{matrix} + \begin{matrix} c_{i_3 6} \\ 2 \\ \infty \\ 3 \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ 11 \end{matrix} \right\} = \min\left\{ \begin{matrix} 2 \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \end{matrix} \right\} = \lambda_1^{(0)} + c_{16} = 0 + 2 = 2 = \lambda_6^{(1)} = 2 \rightarrow$$

$i_3 = 1$;

Тогда $i_1, i_2, i_3 = 4, 6, 1 \rightarrow V_1V_6V_4$ – искомый минимальный путь.

$V_1 \rightarrow V_5$, величина $\lambda_5^7 = 8$ выражает длину минимального пути из V_1 в V_5. Определяем минимальное число $k_1 \geq 1$, при котором выполняется равенство $\lambda_5^{(k_1)} = \lambda_5^{(4)} = \lambda_5^{(7)} \rightarrow k_1 = 4$, т.е. минимальное число дуг, соединяющих V_1 и V_7 равно 4. Определяем последовательность номеров i_1, i_2, i_3, i_4, i_5 где $i_1 = 5$:

$$\lambda_{i_2}^{(k_1-1)} + c_{i_2 i_1} = \min\{\lambda_{i_2}^{(3)} + c_{i_2 5}\} = \min\left\{ \begin{matrix} \lambda_{i_2}^{(3)} \\ 0 \\ 7 \\ 1 \\ 5 \\ 9 \\ 2 \\ 7 \\ 13 \end{matrix} + \begin{matrix} c_{i_2 5} \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ 4 \\ \infty \\ \infty \\ 1 \\ \infty \end{matrix} \right\} = \min\left\{ \begin{matrix} \infty \\ \infty \\ \infty \\ 9 \\ \infty \\ \infty \\ 8 \\ \infty \end{matrix} \right\} = \lambda_7^{(3)} + c_{75} = 7 + 1 = 8 = \lambda_5^{(4)} = 8 \rightarrow$$

$i_2 = 7$;

$$\begin{array}{lccccl}
 & \lambda_{i_3}^{(2)} & & c_{i_3 7} & & \\
 & 0 & & \infty & & \infty \\
 & 7 & & 2 & & 9 \\
 & 1 & & \infty & & \infty \\
\lambda_{i3}^{(k_1-2)} + c_{i_3 i_2} = \min\{\lambda_{i_3}^{(2)} + c_{i_3 7}\} = \min\{ & 5 & + & 2 & \} = \min\{7\} = & \lambda_4^{(1)} + c_{47} = 5 + 2 = 7 = \lambda_7^{(3)} = 7 \rightarrow \\
 & \infty & & \infty & & \infty \\
 & 2 & & \infty & & 5 \\
 & 9 & & \infty & & \infty \\
 & 13 & & \infty & & \infty
\end{array}$$

$i_3 = 4;$

$$\begin{array}{lccccl}
 & \lambda_{i_4}^{(1)} & & c_{i_4 4} & & \\
 & 0 & & \infty & & \infty \\
 & 7 & & \infty & & \infty \\
 & 1 & & 5 & & 6 \\
\lambda_{i_4}^{(k_1-4)} + c_{i_4 i_3} = \min\{\lambda_{i_4}^{(1)} + c_{i_4 4}\} = \min\{ & \infty & + & \infty & \} = \min\{\infty\} = & \lambda_6^{(1)} + c_{64} = 2 + 3 = 5 = \lambda_4^{(2)} = 5 \rightarrow \\
 & \infty & & \infty & & \infty \\
 & 2 & & 3 & & 5 \\
 & \infty & & \infty & & \infty \\
 & \infty & & \infty & & \infty
\end{array}$$

$i_4 = 6;$

$$\begin{array}{lccccl}
 & \lambda_{i_5}^{(0)} & & c_{i_5 6} & & \\
 & 0 & & 2 & & 2 \\
 & \infty & & \infty & & \infty \\
 & \infty & & 3 & & \infty \\
\lambda_{i_5}^{(0)} + c_{i_5 i_4} = \min\{\lambda_{i_5}^{(0)} + c_{i_5 6}\} = \min\{ & \infty & + & \infty & \} = \min\{\infty\} = & \lambda_1^{(0)} + c_{16} = 0 + 2 = 2 = \lambda_6^{(1)} = 2 \rightarrow \\
 & \infty & & \infty & & \infty \\
 & \infty & & \infty & & \infty \\
 & \infty & & \infty & & \infty \\
 & \infty & & 11 & & \infty
\end{array}$$

$i_5 = 1;$

Тогда $i_1, i_2, i_3, i_4, i_5 = 5, 7, 4, 6, 1 \rightarrow V_1V_6V_4V_7V_5$ – искомый минимальный путь.

$V_1 \rightarrow V_6$, величина $\lambda_6^7 = 2$ выражает длину минимального пути из V_1 в V_6.

Определяем минимальное число $k_1 \geq 1$, при котором выполняется равенство $\lambda_6^{(k_1)} = \lambda_6^{(1)} = \lambda_6^{(7)} \rightarrow$ $k_1 = 1$, т.е. минимальное число дуг, соединяющих V_1 и V_6 равно 1. Определяем последовательность номеров i_1, i_2 где $i_1 = 6$:
Тогда $i_1, i_2 = 6, 1 \rightarrow V_1V_6$ – искомый минимальный путь.

$V_1 \rightarrow V_7$, величина $\lambda_7^7 = 7$ выражает длину минимального пути из V_1 в V_7.
Определяем минимальное число $k_1 \geq 1$, при котором выполняется равенство $\lambda_7^{(k_1)} = \lambda_7^{(3)} = \lambda_7^{(7)} \rightarrow$ $k_1 = 3$, т.е. минимальное число дуг, соединяющих V_1 и V_7 равно 3. Определяем последовательность номеров i_1, i_2, i_3, i_4 где $i_1 = 7$:

$$\lambda_{i_2}^{(k_1-1)} + c_{i_2 i_1} = \min\{\lambda_{i_2}^{(2)} + c_{i_2 7}\} = \min\left\{\begin{array}{ccc} \lambda_{i_2}^{(2)} & & c_{i_2 7} \\ 0 & & \infty \\ 7 & & 2 \\ 1 & & \infty \\ 5 & + & 2 \\ 8 & & \infty \\ 2 & & \infty \\ 9 & & \infty \\ 13 & & \infty \end{array}\right\} = \min\left\{\begin{array}{c} \\ \infty \\ 9 \\ \infty \\ 7 \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \end{array}\right\} = \lambda_4^{(2)} + c_{47} = 5 + 2 = 7 = \lambda_7^{(3)} = 7 \rightarrow$$

$i_2 = 4$;

$$\lambda_{i3}^{(k_1-2)} + c_{i_3 i_2} = \min\{\lambda_{i_3}^{(1)} + c_{i_3 4}\} = \min\left\{\begin{array}{ccc} \lambda_{i_3}^{(1)} & & c_{i_3 4} \\ 0 & & \infty \\ 7 & & \infty \\ 1 & & 5 \\ \infty & + & \infty \\ \infty & & \infty \\ 2 & & 3 \\ \infty & & \infty \\ \infty & & \infty \end{array}\right\} = \min\left\{\begin{array}{c} \\ \infty \\ \infty \\ 6 \\ \infty \\ \infty \\ 5 \\ \infty \\ \infty \end{array}\right\} = \lambda_6^{(1)} + c_{64} = 2 + 3 = 5 = \lambda_4^{(2)} = 5 \rightarrow$$

$i_3 = 6$;

$$\lambda_{i_4}^{(0)} + c_{i_4 i_3} = \min\{\lambda_{i_4}^{(0)} + c_{i_4 6}\} = \min\left\{ \begin{array}{c} \lambda_{i_4}^{(0)} \\ 0 \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \end{array} + \begin{array}{c} c_{i_4 6} \\ 2 \\ \infty \\ 3 \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ 11 \end{array} \right\} = \min\left\{ \begin{array}{c} 2 \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \end{array} \right\} = \lambda_1^{(0)} + c_{16} = 0 + 2 = 2 = \lambda_6^{(1)} = 2 \rightarrow$$

$i_4 = 1$;

Тогда $i_1, i_2, i_3, i_4 = 7, 4, 6, 1 \rightarrow V_1V_6V_4V_7$ – искомый минимальный путь.

$V_1 \rightarrow V_8$, величина $\lambda_8^7 = 10$ выражает длину минимального пути из V_1 в V_8. Определяем минимальное число $k_1 \geq 1$, при котором выполняется равенство $\lambda_8^{(k_1)} = \lambda_8^{(5)} = \lambda_8^{(7)} \rightarrow k_1 = 5$, т.е. минимальное число дуг, соединяющих V_1 и V_8 равно 5. Определяем последовательность номеров $i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6$ где $i_1 = 8$:

$$\lambda_{i_2}^{(k_1-1)} + c_{i_2 i_1} = \min\{\lambda_{i_2}^{(4)} + c_{i_2 8}\} = \min\left\{ \begin{array}{c} \lambda_{i_2}^{(4)} \\ 0 \\ 7 \\ 1 \\ 5 \\ 8 \\ 2 \\ 7 \\ 10 \end{array} + \begin{array}{c} c_{i_2 8} \\ \infty \\ 6 \\ \infty \\ \infty \\ 2 \\ \infty \\ 5 \\ \infty \end{array} \right\} = \min\left\{ \begin{array}{c} \infty \\ 13 \\ \infty \\ \infty \\ 10 \\ \infty \\ 12 \\ \infty \end{array} \right\} = \lambda_5^{(4)} + c_{58} = 8 + 2 = 10 = \lambda_8^{(5)} = 10 \rightarrow$$

$i_2 = 5$;

$$\lambda_{i3}^{(k_1-2)} + c_{i_3 i_2} = \min\{\lambda_{i_3}^{(3)} + c_{i_3 5}\} = \min\left\{ \begin{array}{c} \lambda_{i_2}^{(3)} \\ 0 \\ 7 \\ 1 \\ 5 \\ 9 \\ 2 \\ 7 \\ 13 \end{array} + \begin{array}{c} c_{i_2 5} \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ 4 \\ \infty \\ \infty \\ 1 \\ \infty \end{array} \right\} = \min\left\{ \begin{array}{c} \infty \\ \infty \\ \infty \\ 9 \\ \infty \\ \infty \\ 8 \\ \infty \end{array} \right\} = \lambda_7^{(3)} + c_{75} = 7 + 1 = 8 = \lambda_5^{(4)} = 8 \rightarrow$$

$i_3 = 7$;

$$\lambda_{i_4}^{(k_1-3)}+c_{i_4 i_3}=\min\{\lambda_{i_4}^{(2)}+c_{i_4 7}\}=\min\left\{\begin{array}{ccc}\lambda_{i_4}^{(2)} & & c_{i_4 7}\\ 0 & & \infty\\ 7 & & 2\\ 1 & & \infty\\ 5 & + & 2\\ \infty & & \infty\\ 2 & & \infty\\ 9 & & \infty\\ 13 & & \infty\end{array}\right\}=\min\left\{\begin{array}{c}\\ \infty\\ 9\\ \infty\\ 7\\ \infty\\ \infty\\ \infty\\ \infty\end{array}\right\}=\lambda_4^{(3)}+c_{47}=5+2=7=\lambda_7^{(3)}=7\rightarrow$$

$i_4 = 4$;

$$\lambda_{i_5}^{(k_1-4)}+c_{i_5 i_4}=\min\{\lambda_{i_5}^{(2)}+c_{i_5 4}\}=\min\left\{\begin{array}{ccc}\lambda_{i_5}^{(1)} & & c_{i_5 4}\\ 0 & & \infty\\ 7 & & \infty\\ 1 & & 5\\ \infty & + & \infty\\ \infty & & \infty\\ 2 & & 3\\ \infty & & \infty\\ \infty & & \infty\end{array}\right\}=\min\left\{\begin{array}{c}\\ \infty\\ \infty\\ 6\\ \infty\\ \infty\\ 5\\ \infty\\ \infty\end{array}\right\}=\lambda_6^{(1)}+c_{64}=2+3=5=\lambda_4^{(2)}=5\rightarrow$$

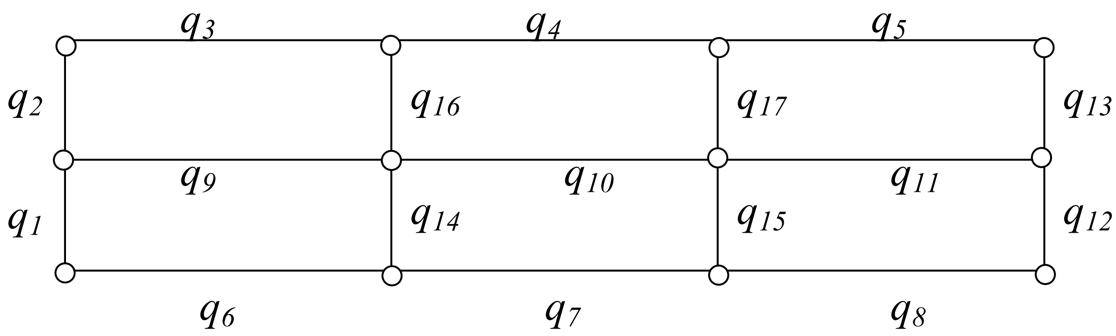
$i_5 = 6$;

$$\lambda_{i_6}^{(0)}+c_{i_6 i_5}=\min\{\lambda_{i_6}^{(0)}+c_{i_6 6}\}=\min\left\{\begin{array}{ccc}\lambda_{i_6}^{(0)} & & c_{i_6 6}\\ 0 & & 2\\ \infty & & \infty\\ \infty & & 3\\ \infty & + & \infty\\ \infty & & \infty\\ \infty & & \infty\\ \infty & & \infty\\ \infty & & 11\end{array}\right\}=\min\left\{\begin{array}{c}\\ 2\\ \infty\\ \infty\\ \infty\\ \infty\\ \infty\\ \infty\\ \infty\end{array}\right\}=\lambda_1^{(0)}+c_{16}=0+2=2=\lambda_6^{(1)}=2\rightarrow$$

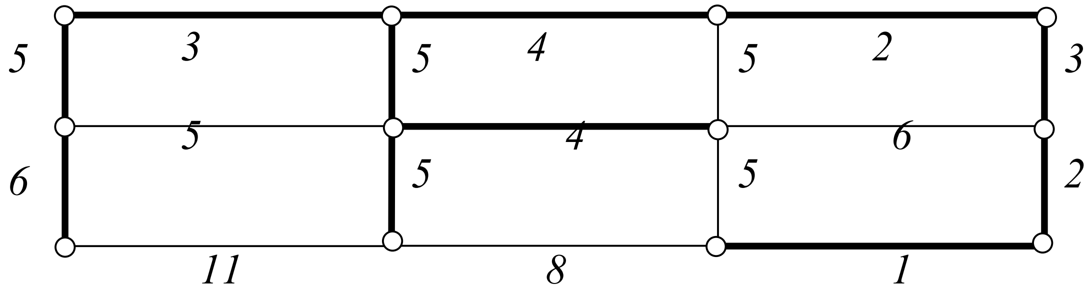
$i_6 = 1$;

Тогда $i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6 = 8, 5, 7, 4, 6, 1 \rightarrow V_1V_6V_4V_7V_5V_8$ – искомый минимальный путь.

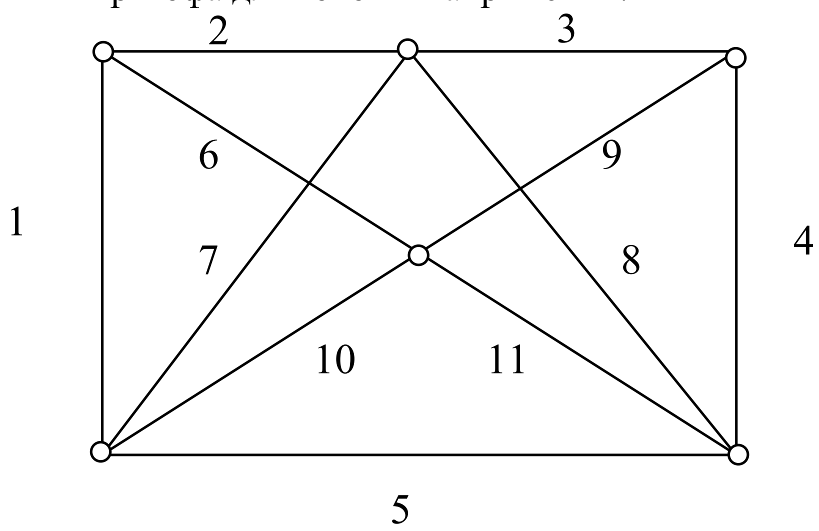
11. Найти остовное дерево[40] с минимальной суммой длин входящих в него ребер. Если длины ребер с 14 по 17 = 5, а остальные - с 1 по 13 = 6, 5, 3, 4, 2, 11, 8, 1, 5, 4, 6, 2, 3 соответственно.



Используя алгоритм для получения МОД[41], решаем задачу:

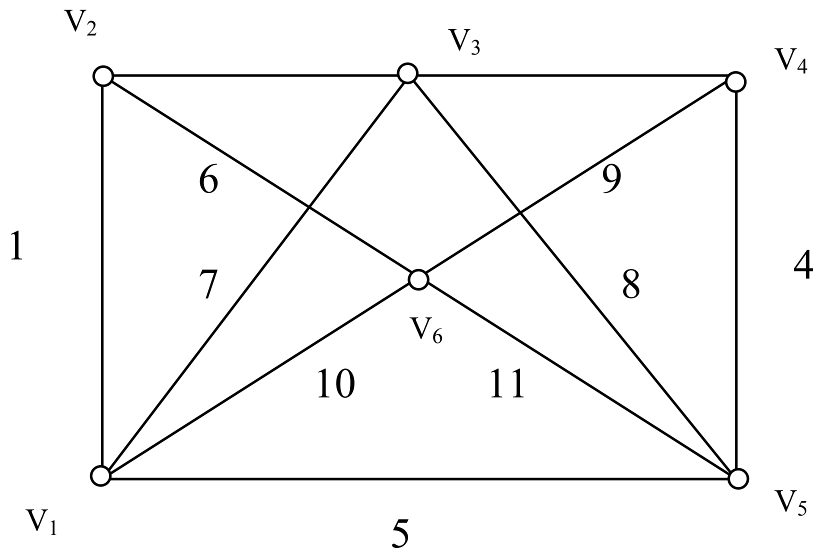


12. Пусть каждому ребру неориентированного графа соответствует некоторый элемент электрической цепи . Составить линейно-независимую систему уравнений Кирхгофа для токов и напряжений.

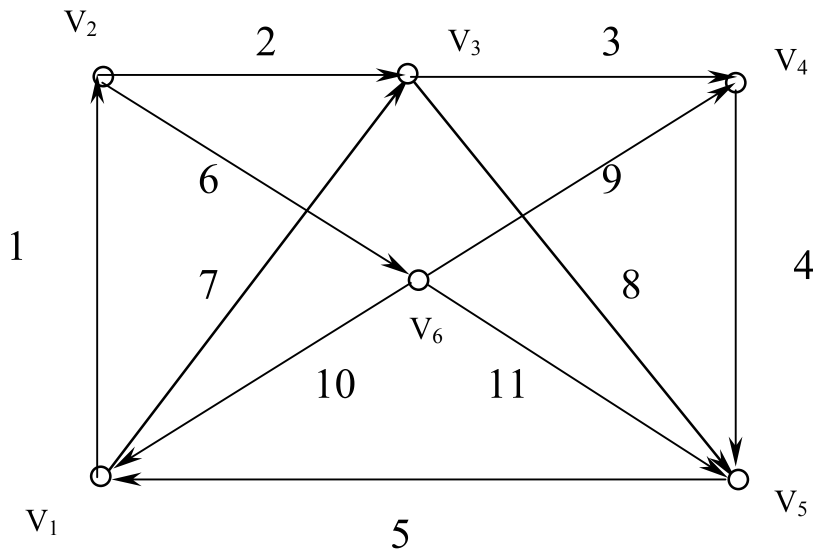


[40] Остовным деревом графа G называют его подграф D ∈ G, содержащий все вершины графа G и являющийся деревом. Дерево – связный неориентированный граф, не имеющий циклов.
[41] МОД – минимальное остовное дерево.

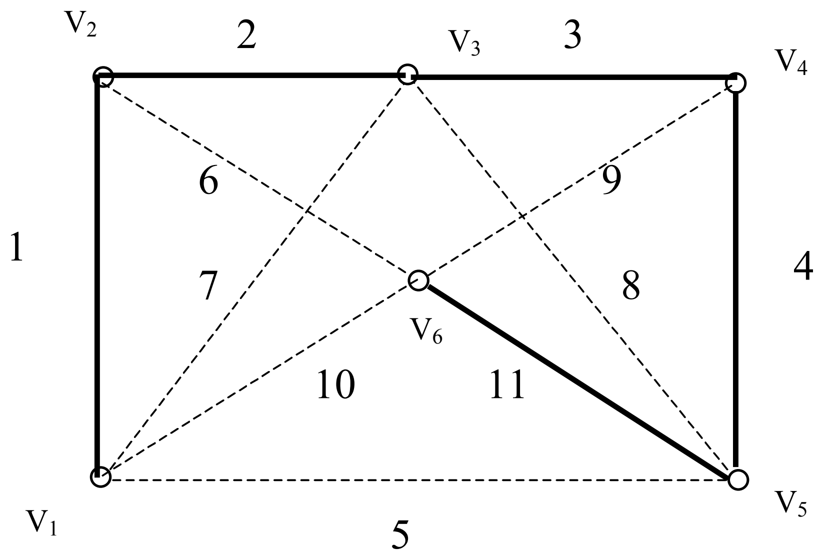
Решение:



Введем ориентацию:



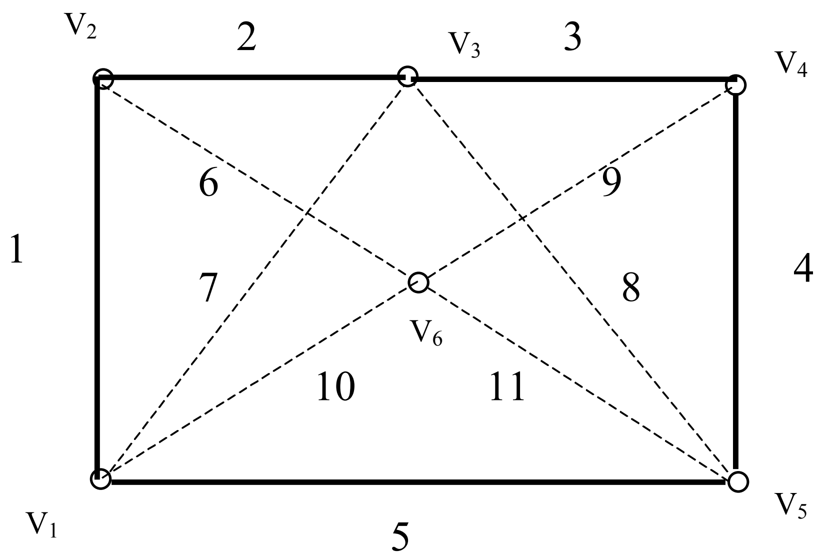
Найдем остовное дерево:



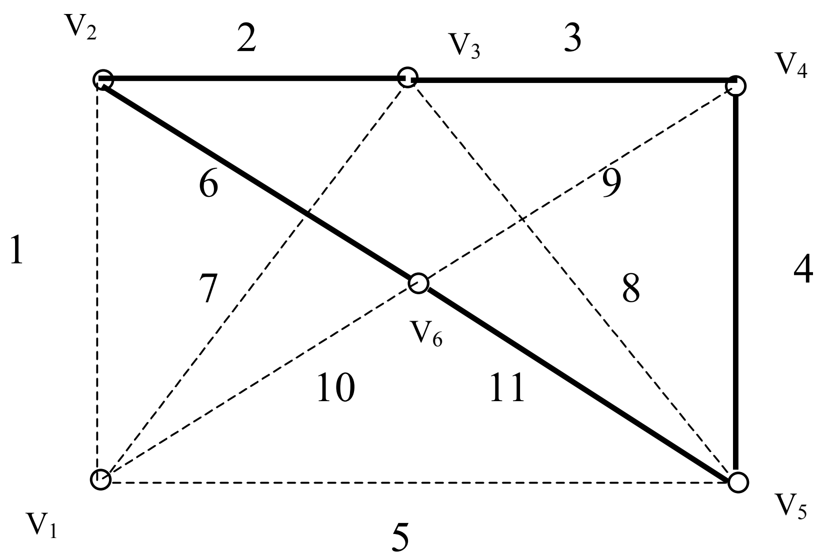
Определяем базис цикла: n = 11-6+1=6.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,10,11

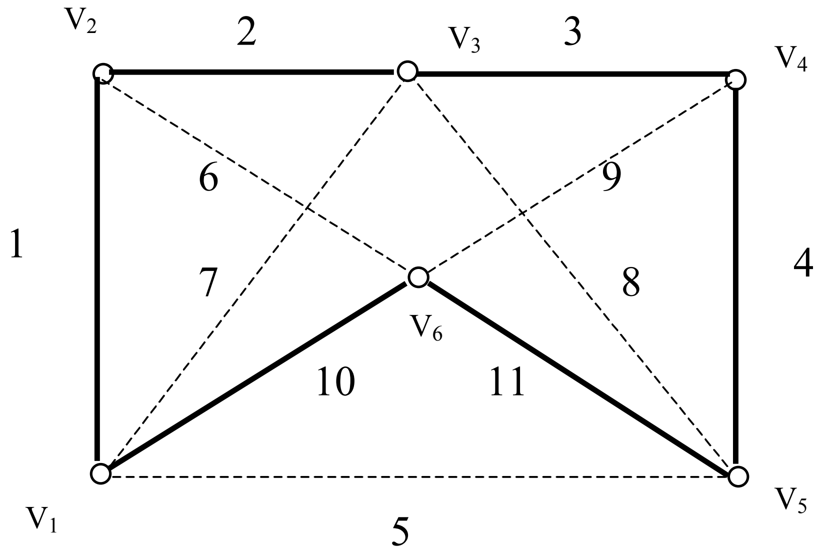
$c(\mu_1) = (1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$;



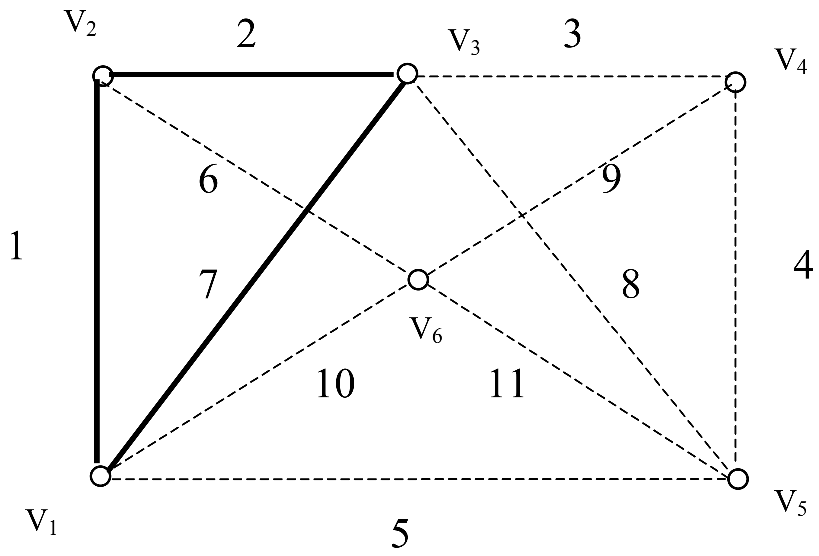
$c(\mu_2) = (0, 1, 1, 1, 0,-1, 0, 0, 0, 0,-1)$;



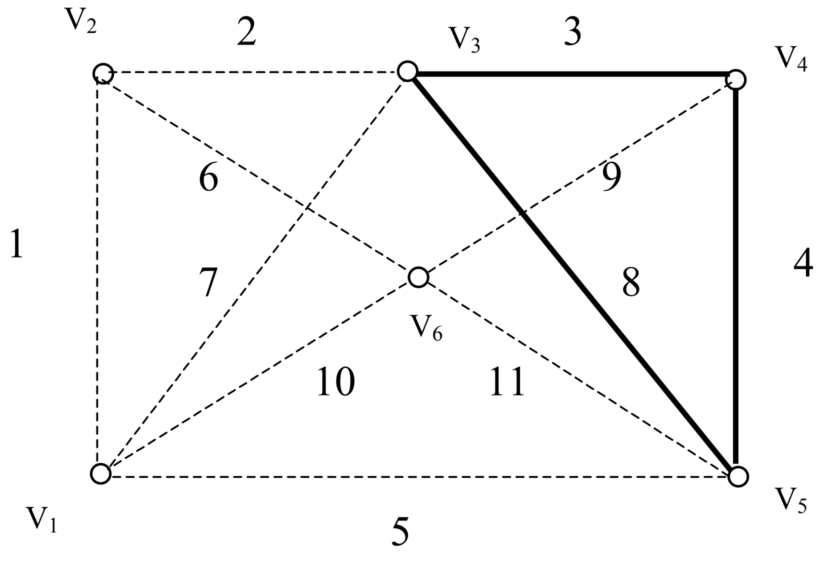
$c(\mu_3) = (1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1);$



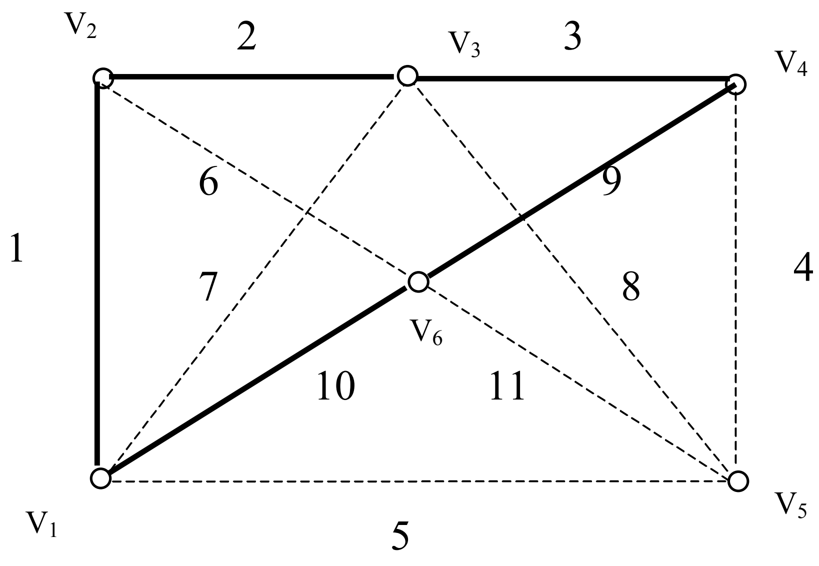
$c(\mu_4) = (1, 1, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0);$



$c(\mu_5) = (0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0);$



$c(\mu_6) = (1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 1, 0);$



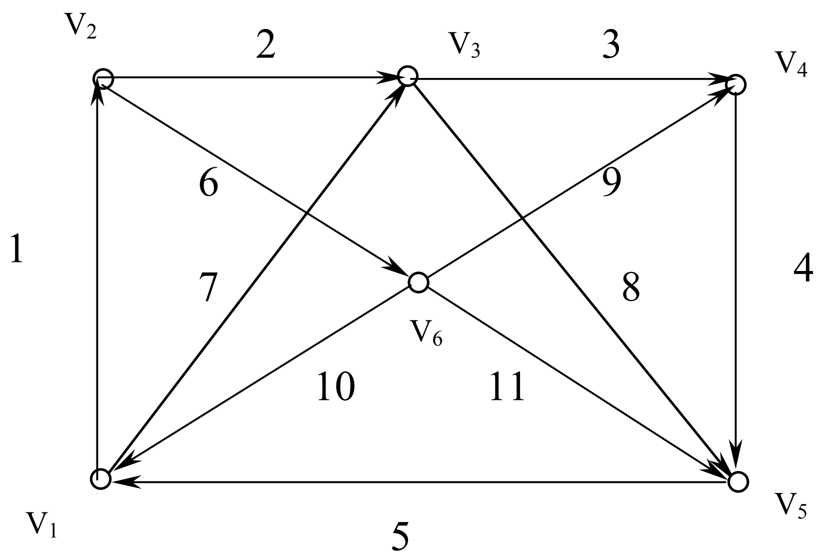
Находим цикломатическую матрицу:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Уравнения Кирхгофа для напряжений:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{x} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \\ U_8 \\ U_9 \\ U_{10} \\ U_{11} \end{bmatrix} = \begin{cases} U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 = 0 \\ U_2 + U_3 + U_4 - U_6 - U_{11} = 0 \\ U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_{10} - U_{11} = 0 \\ U_3 + U_4 - U_8 = 0 \\ U_4 + U_9 + U_{11} = 0 \\ U_1 + U_2 + U_3 - U_9 + U_{10} = 0 \end{cases}$$

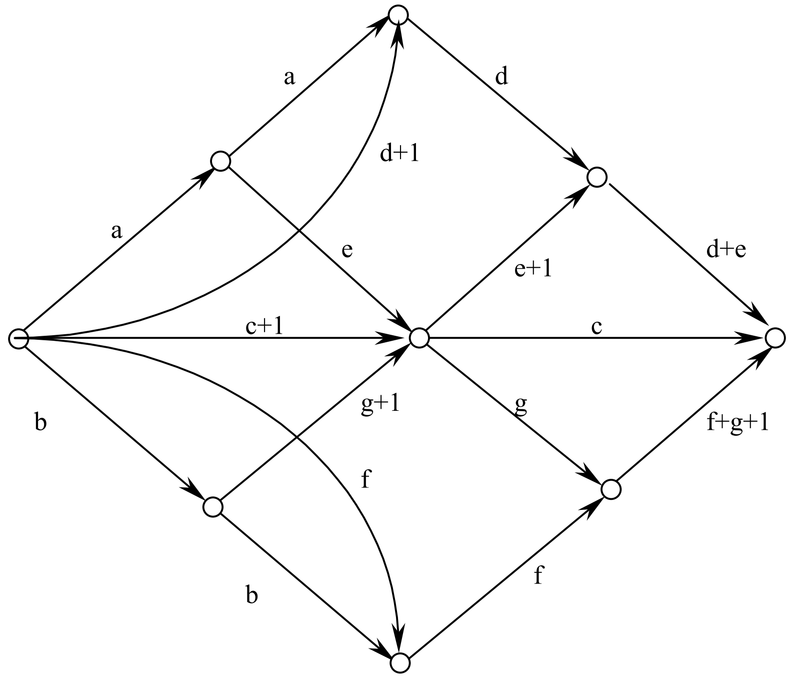
Уравнения Кирхгофа для токов.
Составляем матрицу инцидентности:



$$B = \begin{cases} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{cases}$$

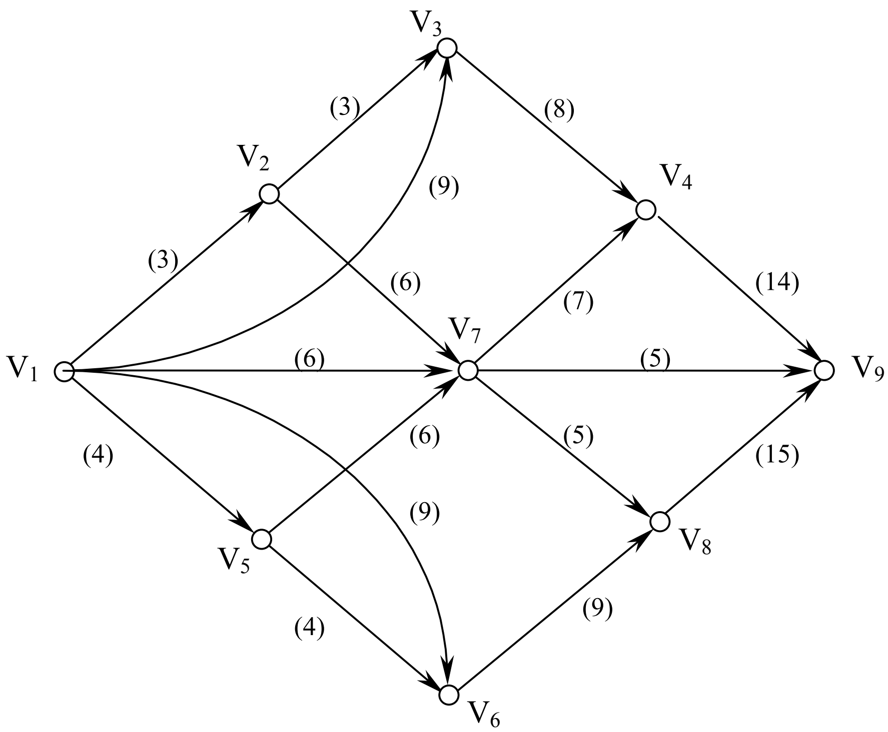
$$B \text{ x } \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \\ I_7 \\ I_8 \\ I_9 \\ I_{10} \\ I_{11} \end{bmatrix} = \begin{cases} I_1 - I_5 + I_7 - I_{10} = 0 \\ -I_1 + I_2 + I_6 = 0 \\ -I_2 + I_3 - I_7 + I_8 = 0 \\ -I_3 + I_4 - I_9 = 0 \\ -I_4 + I_5 + I_8 - I_{11} = 0 \\ \cancel{-I_6 + I_9 + I_{10} + I_4 = 0} \end{cases}$$

13. Используя алгоритм Форда-Фалкерсона построить максимальный поток в транспортной сети[42].



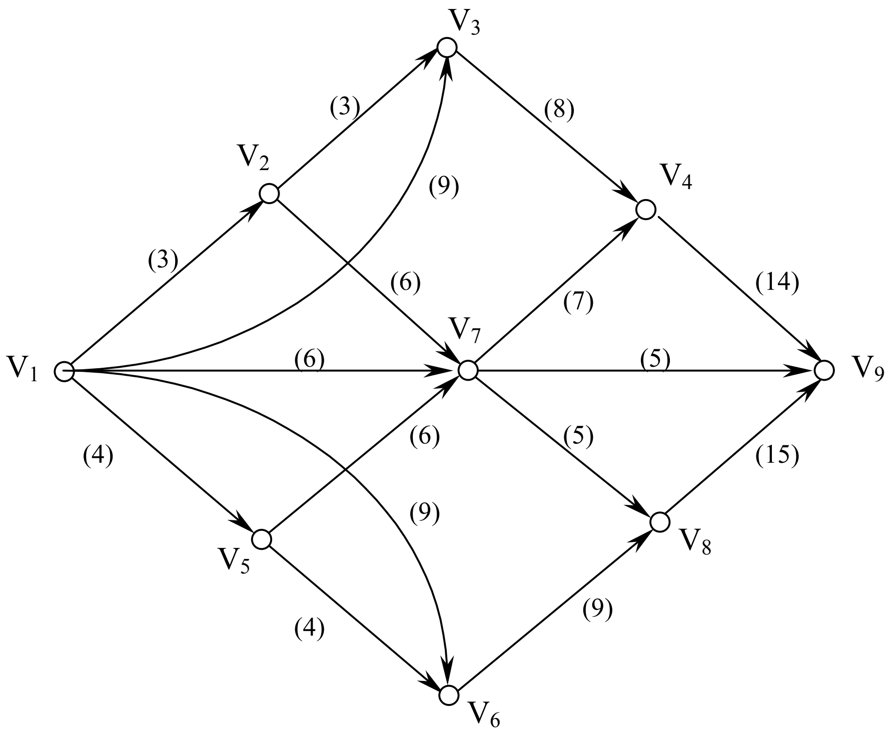
Значения a, b, c, d, e, f, g = 3, 4, 5, 8, 6, 9, 5.

Решение:

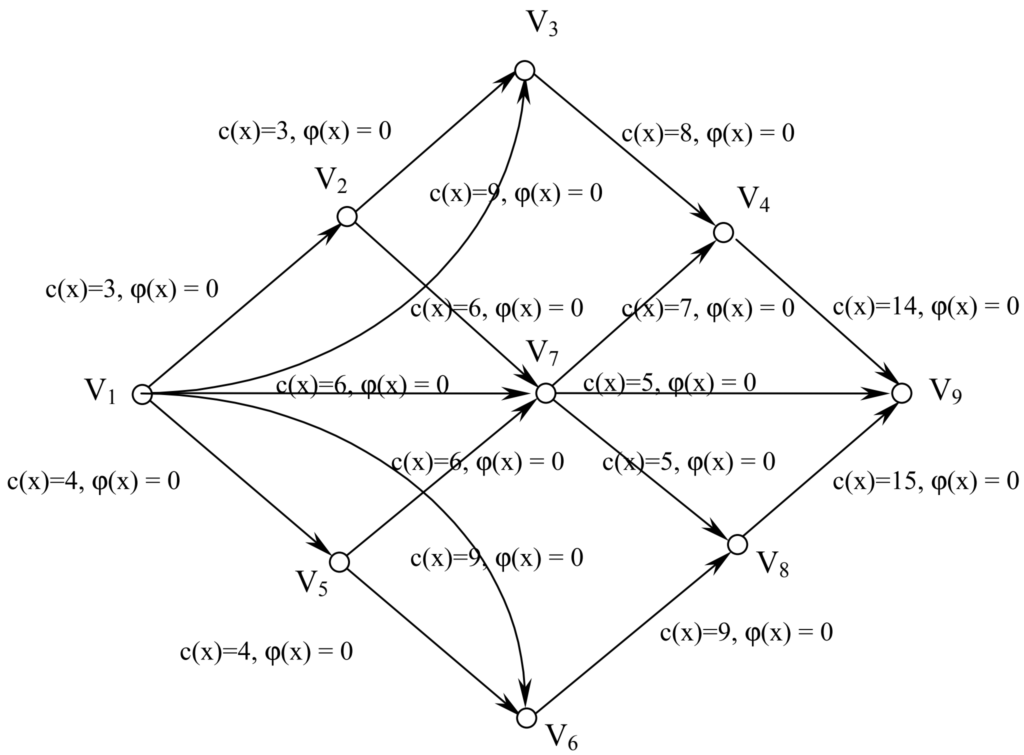


[42] Транспортной сетью называется орграф D = (V, X), в котором выделены две вершины: источник (из него дуги только исходят) и сток (в него дуги только заходят).

Этап. 1. Построение полного потока[43].



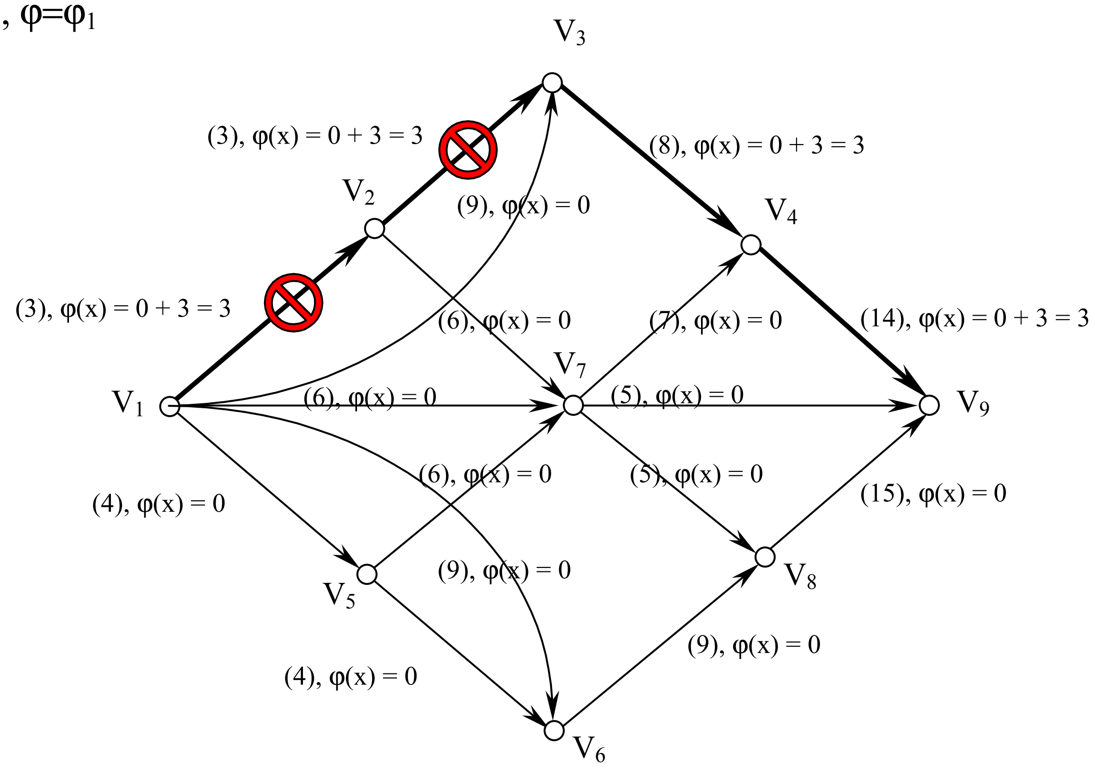
Полагаем $\varphi(x) = 0$ для любого $x \in X$.

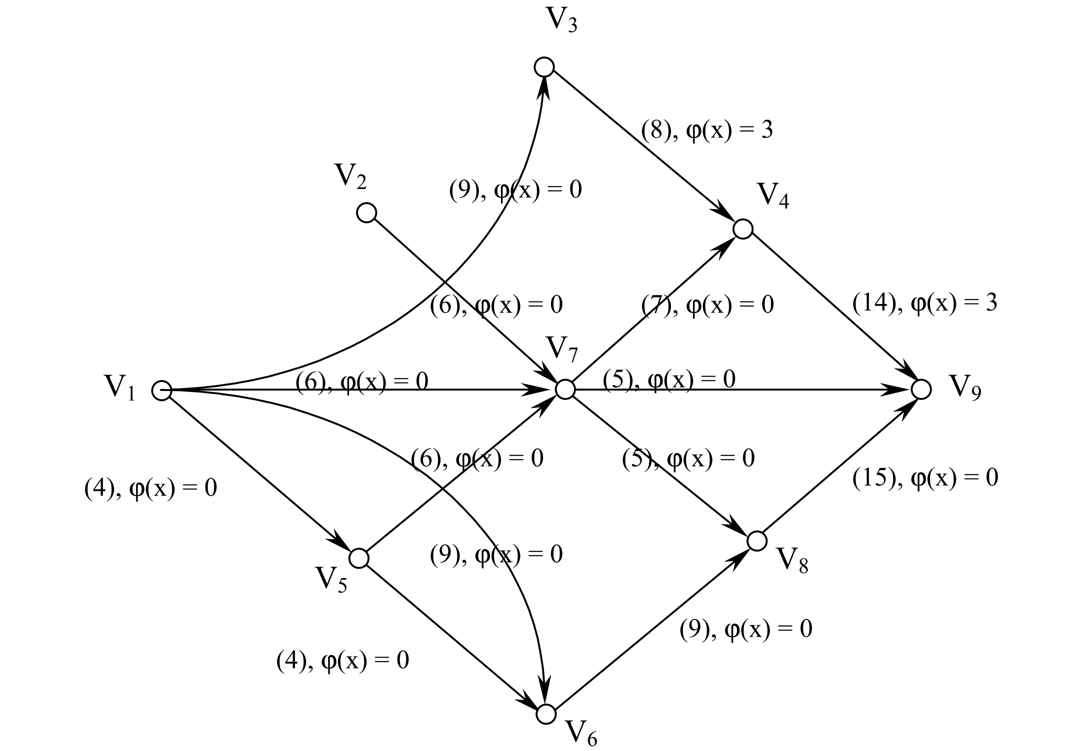


[43] Поток φ называется полным, если любой путь из источника в сток содержит хотя бы одну насыщенную дугу, т.е. дугу x, для которой $\varphi(x) = c(x)$, где $c(x)$ - пропускная способность дуги.

Находим простую цепь η_1 из V_1(источник) в V_9(сток): например $V_1V_2V_3V_4V_9$.
$a = \min(c(x) - \varphi(x)) > 0, x \in \eta$, $\rightarrow$ a = min(3 – 0, 3 – 0, 8-0, 14-0) = 3.
Увеличиваем поток по дугам (V_1, V_2), (V_2, V_3), (V_3, V_4), (V_4, V_9) на величину a = 3.
Удаляем насыщенные дуги (на рисунке помечены «»).

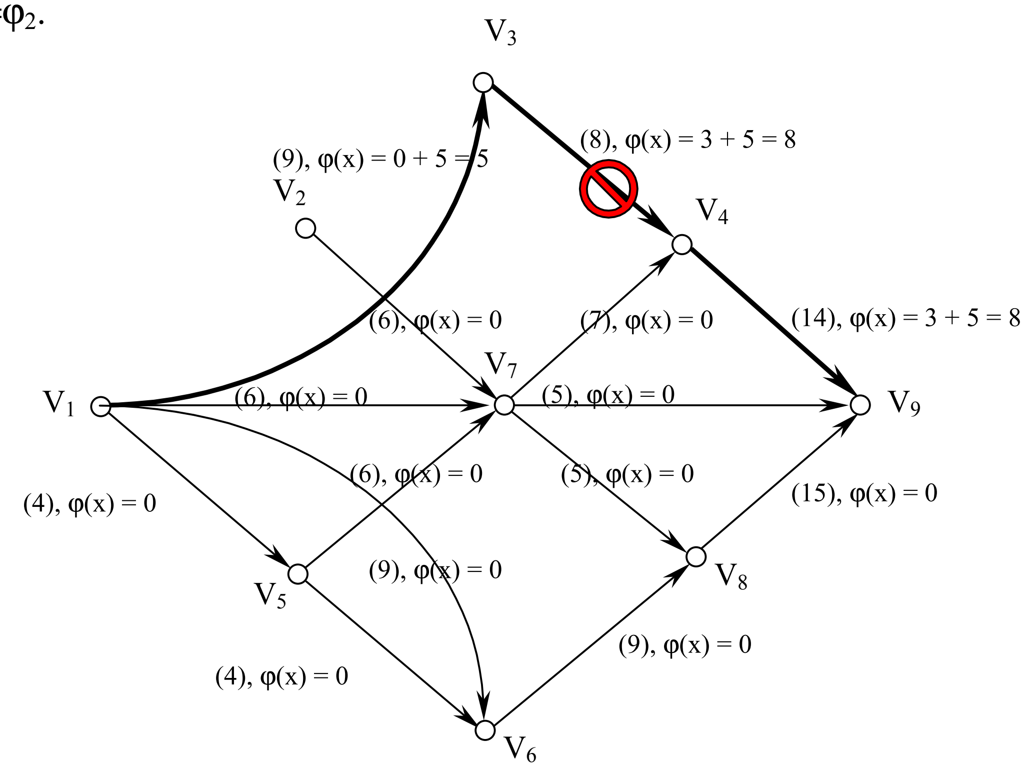
D, $\varphi=\varphi_1$

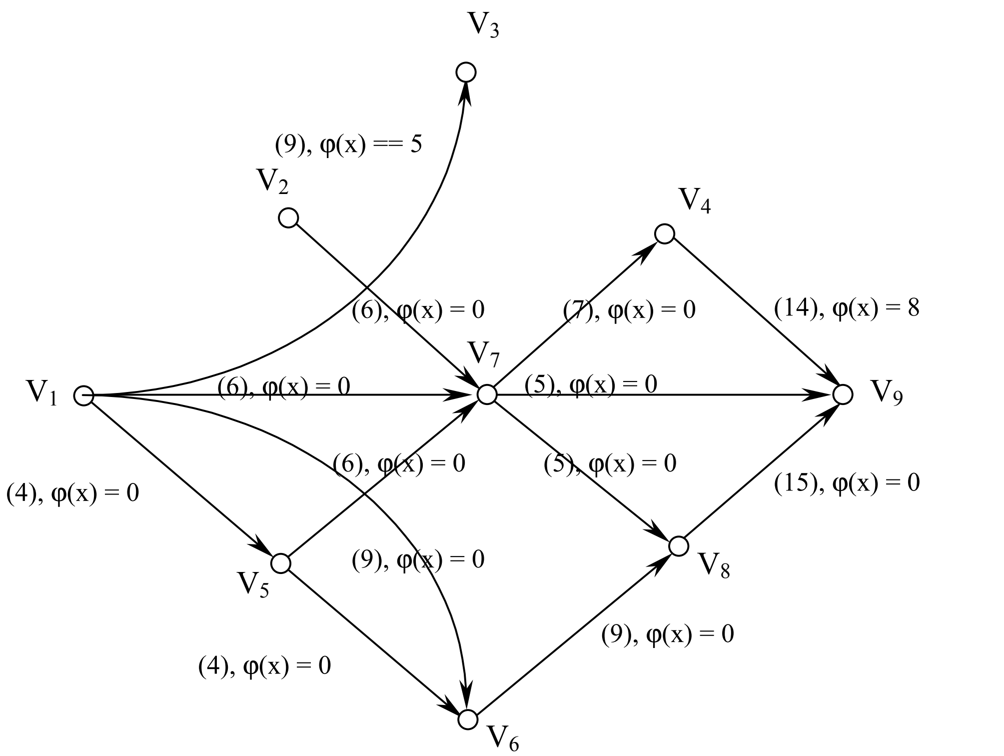




Находим η_2, например, $V_1V_3V_4V_9$. a = min(9-0, 8-3, 14-3) = min(9, 5, 11) = 5.

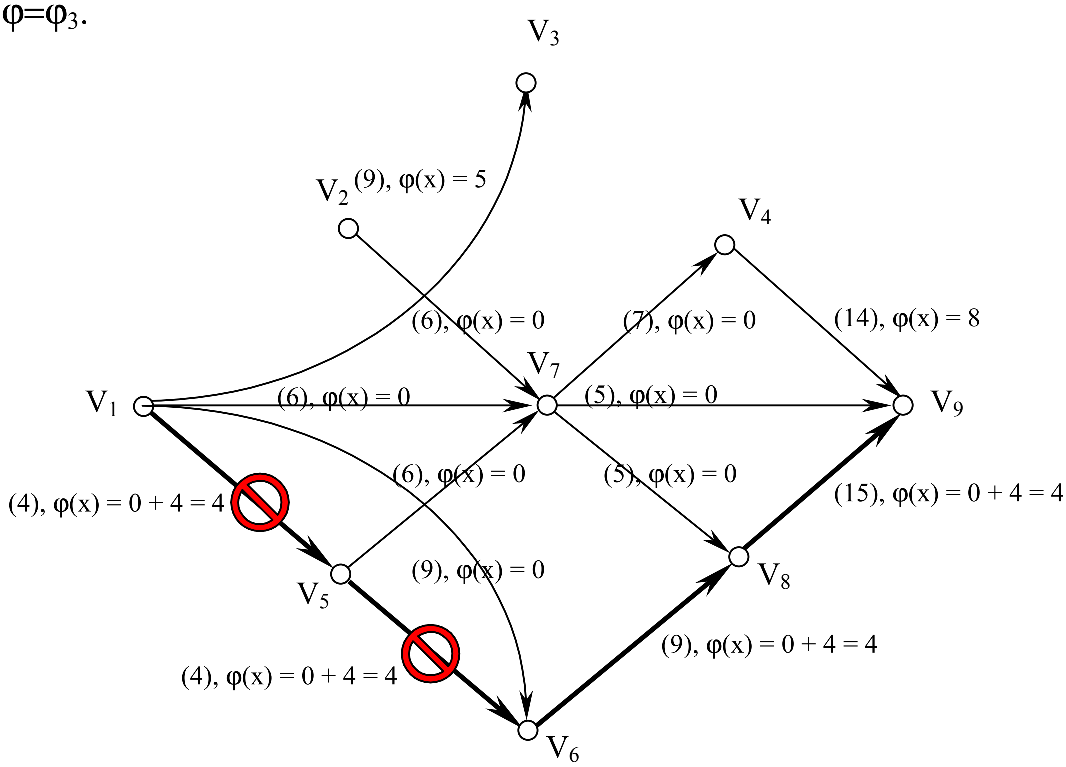
Увеличиваем поток на a = 5. Удаляем насыщенную дугу V_3V_4.
$D^{'}$, $\varphi=\varphi_2$.

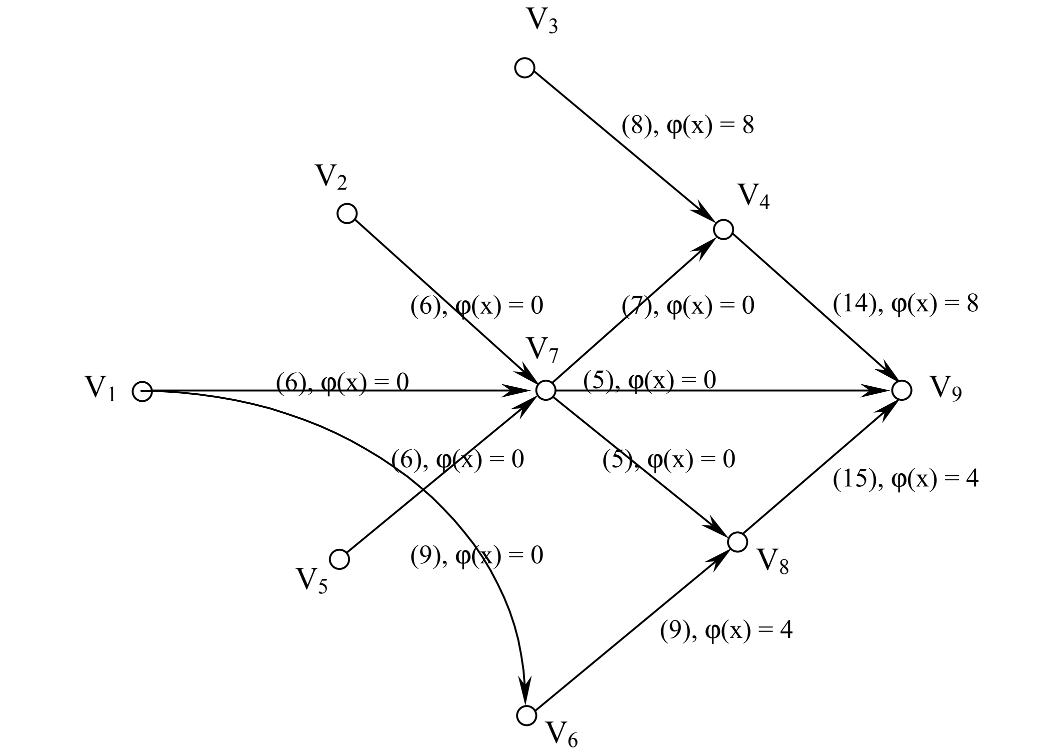




Находим η_3, например, $V_1V_5V_6V_9$. a = min(4-0, 4-0, 9-0, 15-0) = 4.
Увеличиваем поток на a = 4. Удаляем насыщенные дуги (V_1,V_3) и (V_1,V_3).

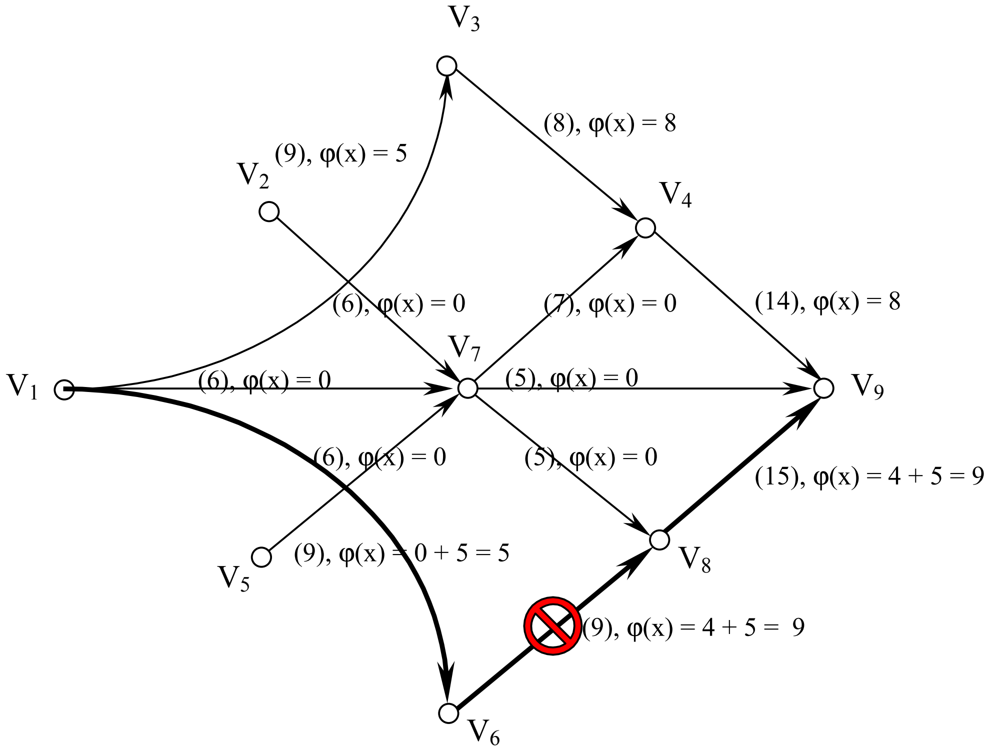
$D^{'}$, $\varphi=\varphi_3$.

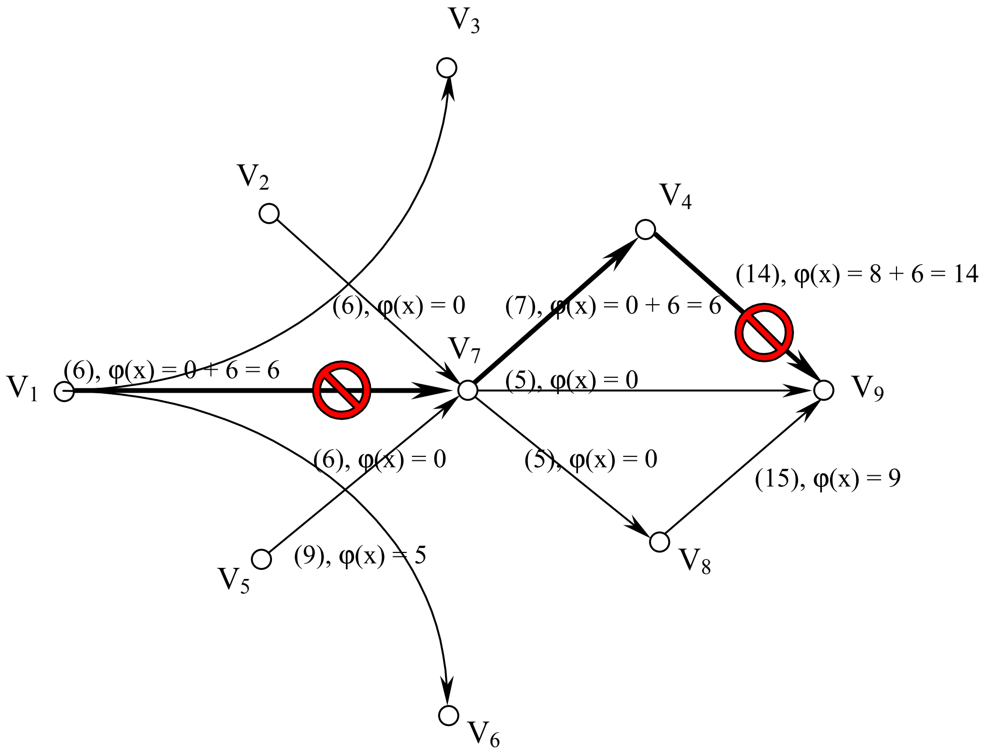




Находим η_4, например, $V_1V_6V_8V_9$. a = min(9-0, 9-4, 15-4) = min(9, 5, 11) = 5. Увеличиваем поток на a = 5. Удаляем насыщенную дугу V_6V_8.

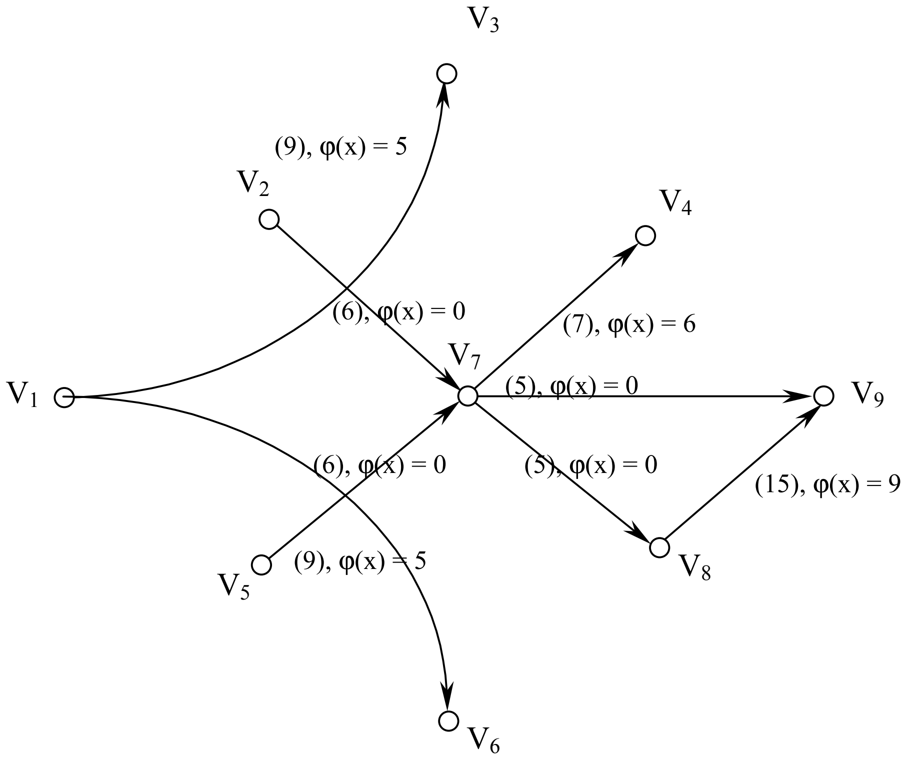
D', φ=φ$_4$.



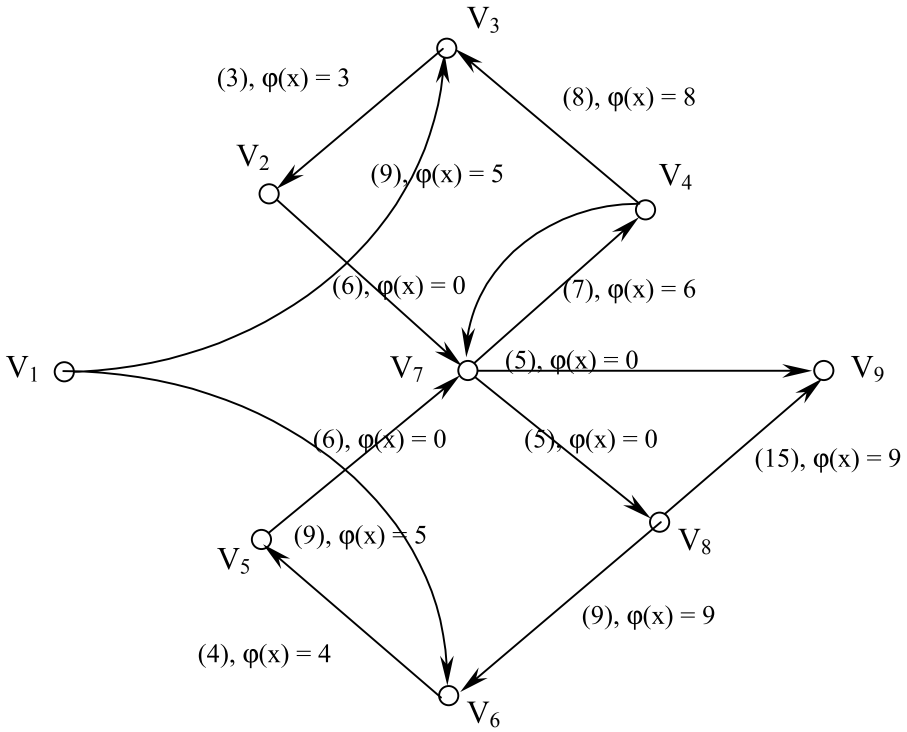


Находим η_5, например, $V_1V_7V_4V_9$. a = min(6-0, 7-0, 14-8) = min(6, 7, 6) = 6. Увеличиваем поток на a = 6. Удаляем насыщенную дуги V_4V_9 и V_1V_7.

D', $\varphi=\varphi_5$. Простой цепи из V_1 в V_9 не существует, следовательно поток φ_5 является полным. Его величина равна $\varphi_5 = 0+9=9$.

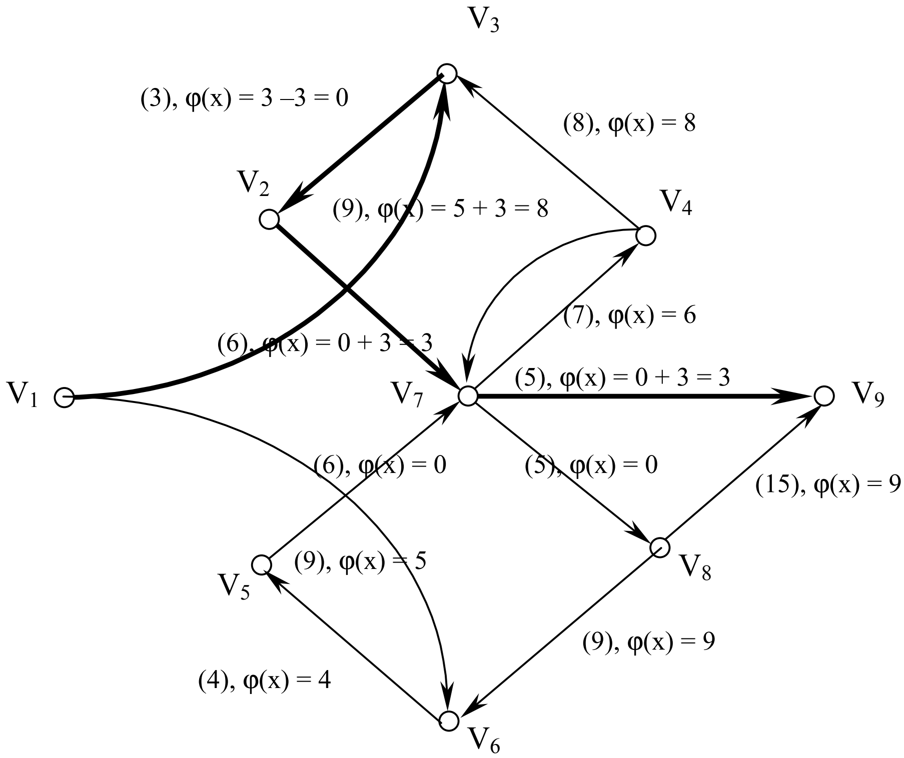


Этап 2. Увеличение полного потока до максимального[44]. Строим орграф приращений: $I(D, \varphi_5)$:

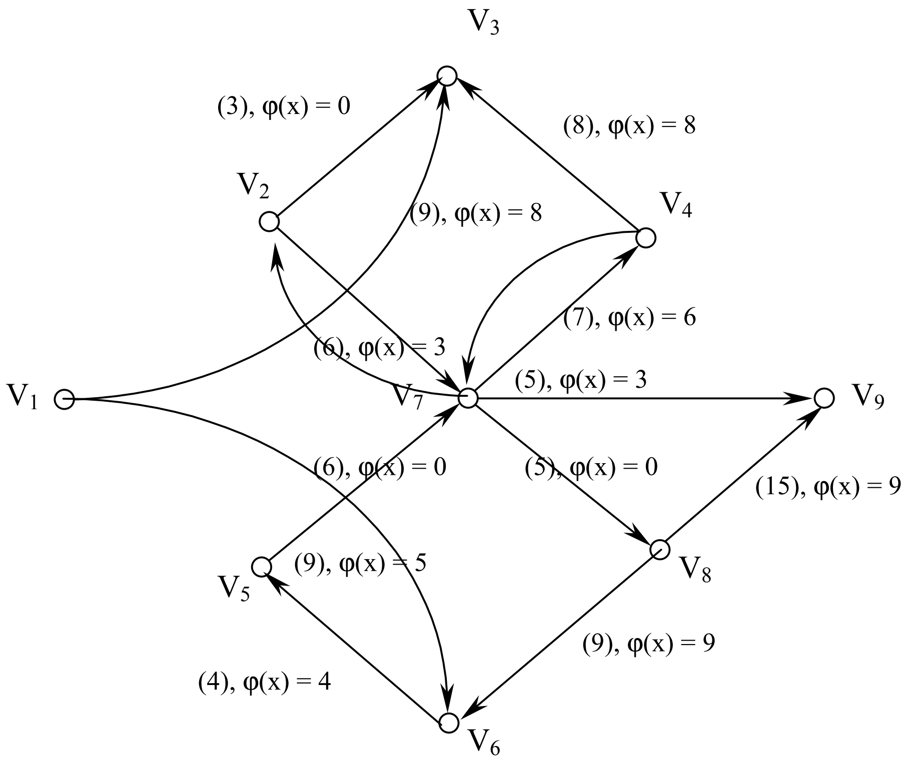


Находим простую цепь η_6, например, $V_1V_3V_2V_7V_9$.
$a = \min[\min(9\text{-}5,\ 6\text{-}0,\ 5\text{-}0),\ \min(3)] = 3$.

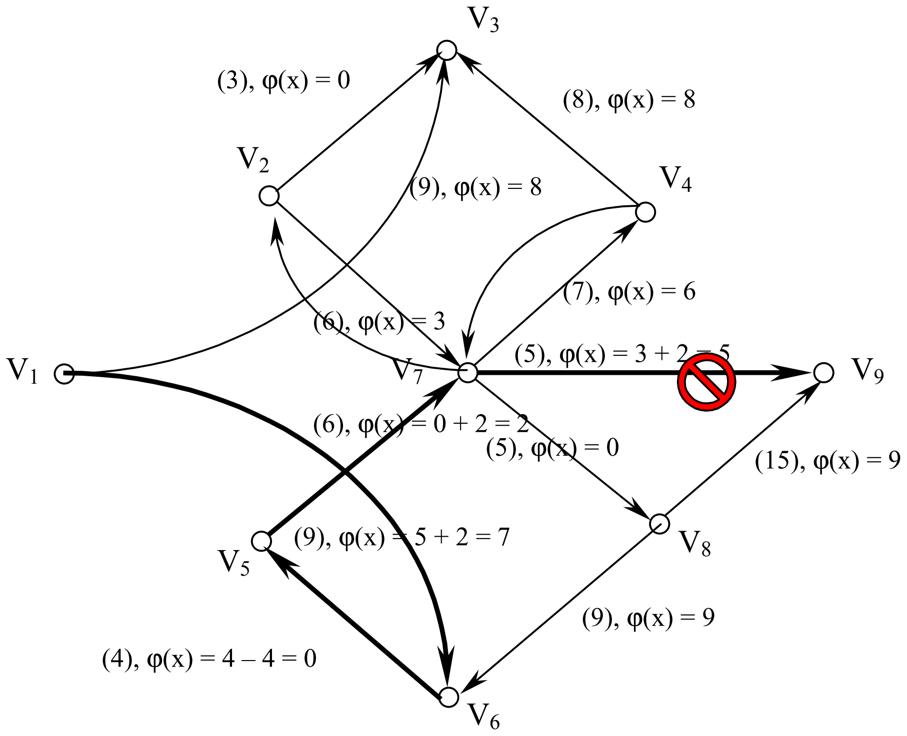
[44] Поток в транспортной сети D является максимальным тогда и только тогда, когда в I(D, φ) сток не достижим из источника. I(D, φ) – орграф приращений.



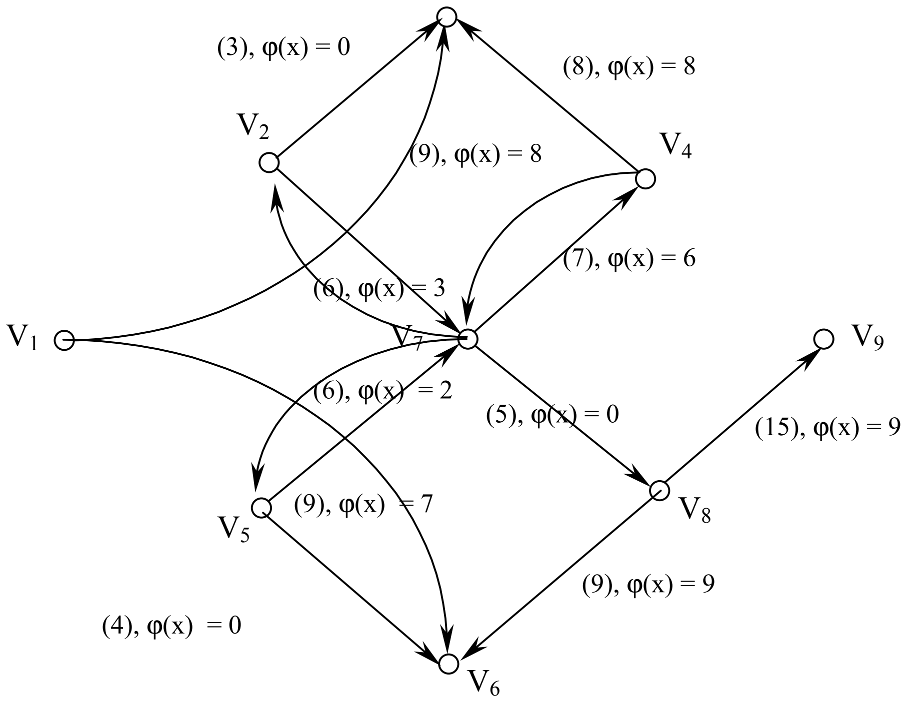
Строим орграф приращений: I(D, φ_6):



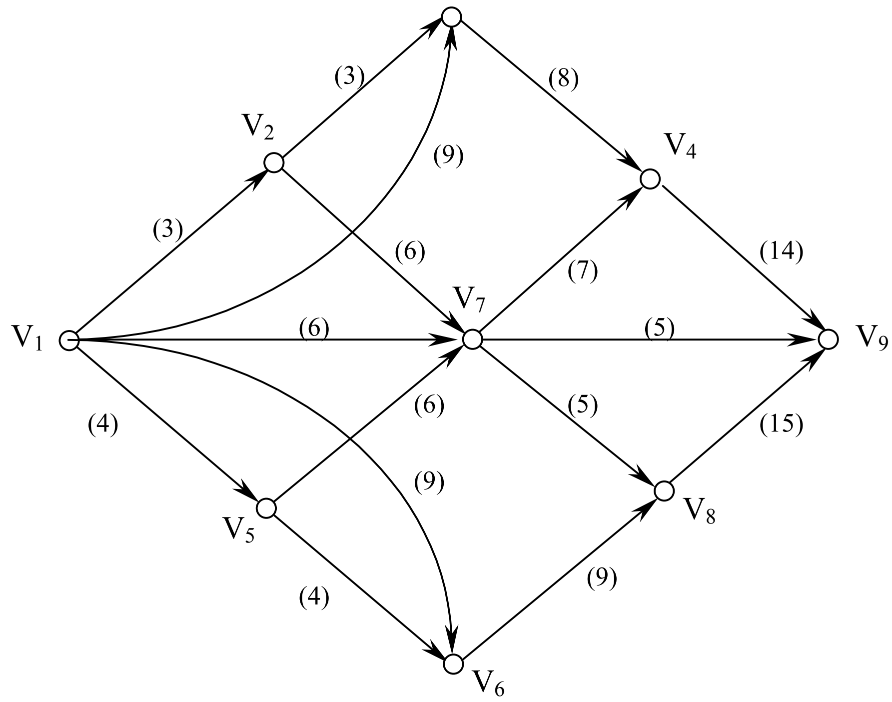
Находим простую цепь η_6, например, $V_1V_6V_5V_7V_9$.
a = min[min(9-5, 6-0, 5-3), min(4)] = 2. Увеличиваем поток на 2. Удаляем насыщенную дугу V_7V_9.

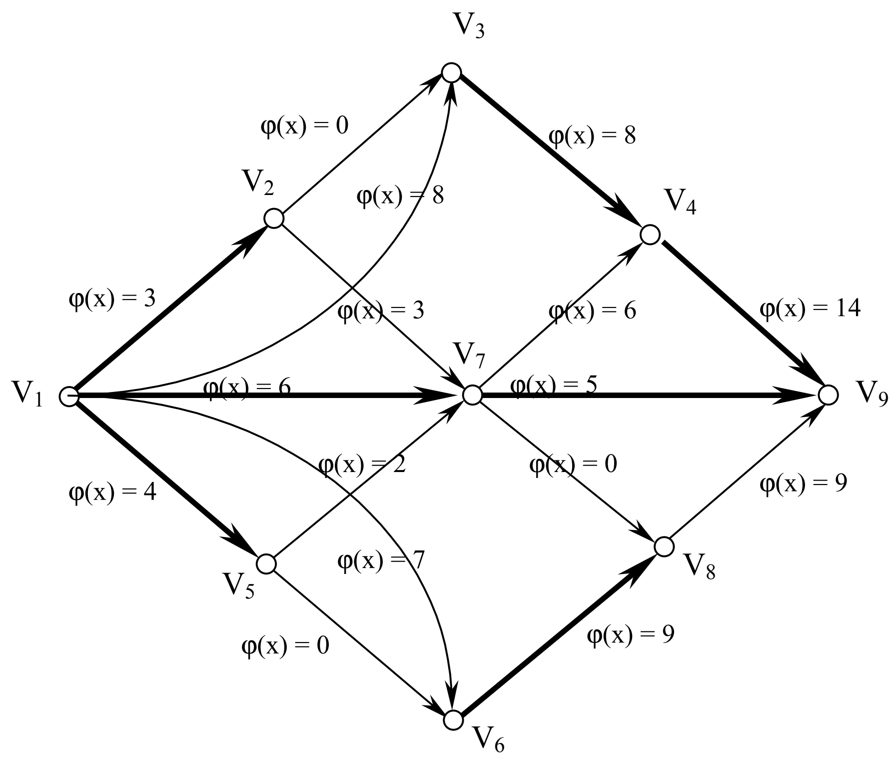


Строим орграф приращений: I(D, φ_7):



Полученный поток является максимальным, так как сток не достижим из источника (насыщенные дуги выделены).





Сумма потоков из источника: 3+4+6+8+7 = 28,
сумма потоков в сток: 14+5+9 = 28!

Литература:

1. Нефедов В.Н., Осипова В.А. Курс дискретной математики. – *М.: Издательство МАИ*, 1992.

2. Методические указания по выполнению расчетных работ по дискретной математике. Под. Ред. Осиповой.